تابع یک به یک: تابعی را یک به یک می گوییم که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم یکسان وجود نداشته باشد.

مثال: $\mathbf{f} = \{(\mathbf{1}\,,\mathbf{2})(\mathbf{3}\,,\mathbf{2})(\mathbf{5}\,,\mathbf{2})(\mathbf{7}\,,\mathbf{1})\}$

در این مثال سه زوج مرتب متمایز با عضو دوم یکسان وجود دارد در نتیجه تابع یک به یک نیست (دقت کنید عضوهای اول یکسان نیستند یعنی تابع است)

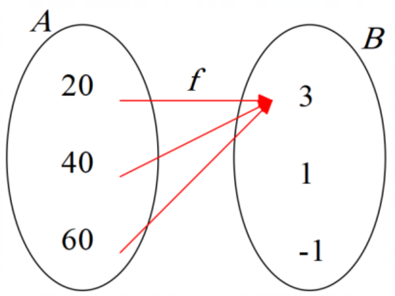
$\mathbf{g} = \{(\mathbf{2}\,,\mathbf{3})(\mathbf{5}\,,\mathbf{2})(\mathbf{7}\,,\mathbf{4})\}$

در تابع g هیچ دو زوج مرتبی با عضو دوم یکسان وجود ندارد یعنی g تابع یک به یک است.

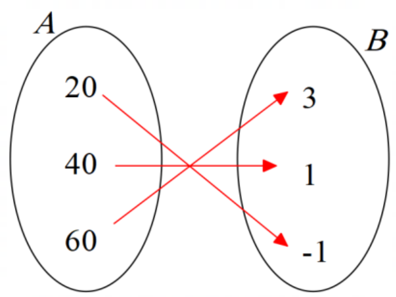
خلاصه: در زوج های مرتب یک تابع اگر عضو دوم تکراری داشته باشیم تابع یک به یک نیست

مثال:

چند فلش (با عضوهای متمایز به یک عدد در B وصل شده اند) تابع یک به یک نیست.



به هر عضو دامنه فقط یک عضو B وصل شده و تابع یک به یک است.



مثال:

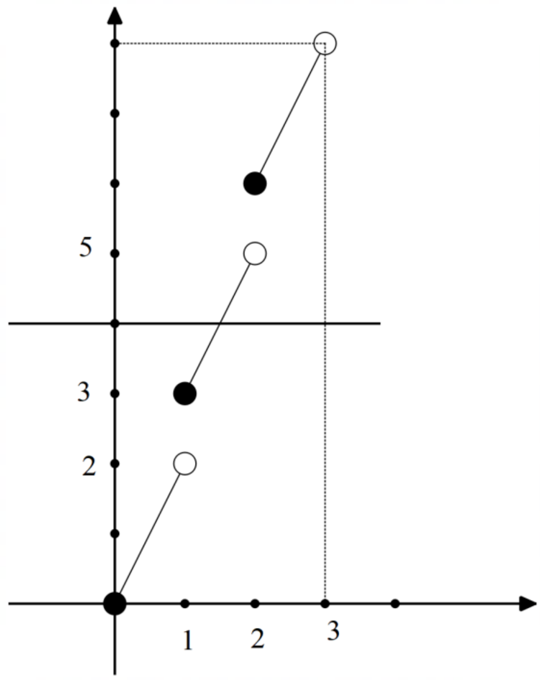
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید کدام تابع یک به یک است.

الف) $f(x) = 2x + [x] \qquad 0 \le x \le 3$

$0 \le x < 1 \qquad y = 2x$

$1 \le x < 2 \qquad y = 2x + 1$

$2 \le x < 3 \qquad y = 2x + 2$



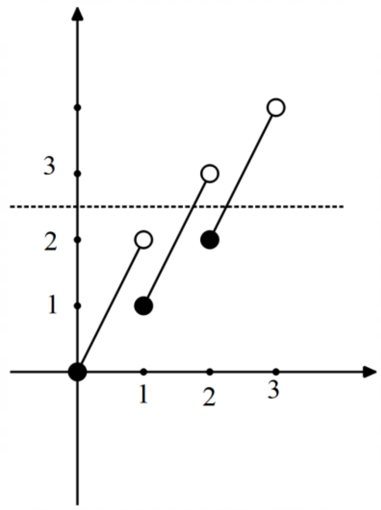
توجه: در دامنه تابع هیچ خطی موازی محور طولها وجود ندارد که نمودار را بیش از یک بار قطع کند پس تابع یک به یک است.

ب) $f(x) = 2x - [x] \qquad 0 \le x < 3$

$0 \le x < 1 \qquad y = 2x \qquad \left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

$1 \le x < 2 \qquad y = 2x - 1 \qquad \left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$

$2 \le x < 3 \qquad y = 2x - 2 \qquad \left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$



اینجا خطی رسم کرده‌ایم که بیش از یک بار تابع را قطع کرده در نتیجه تابع یک به یک نیست.

تمرین:

نمودار توابع زیر را رسم کنید و یک به یک بودن یا نبودن آن‌ها را مشخص کنید (تکرار و تمرین)

الف) $f(x) = |x-1|$

ب) $g(x) = |x-2|+1 \qquad x < 2$

پ) $h(x) = x^2+2 \qquad -1 < x \leq 3$

ت) $L(x) = \cos x$

ث) $k(x) = \cos x \qquad [0\,,\pi]$

ج) $M(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$

چ) $N(x) = 2^{x+2}+2$

ح) $R(x) = |x| + [x] \qquad [-2\,,2]$

خ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

د) $f(x) = x\,|x|$

تعریف ریاضی یک به یک بودن:

$\forall\, x_1$ و $x_2 \in D_f \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

یا معادل آن $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

مثال:

یک به یک بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^x-5}$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{x_1}-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{x_2}-5}$$

$$2^{x_1} - 5 = 2^{x_2} - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است.

در تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ یک به یک بودن آن را بررسی کنید.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 - \sqrt{x_1} = x_2 - \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \times \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \qquad\qquad x_1 = x_2$$

$$x_1 \neq x_2 \qquad\qquad 1 = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$$

ممکن است $x_1 \neq x_2$ باشد و تابع یک به یک نیست.

تمرین:

به کمک تعریف ریاضی (گزاره شرطی) یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = x^2 - 4x \qquad x \leq 4$$

$$f(x) = x^2|x| \qquad x \in R$$

$$f(x) = x + |x| \qquad x \in R$$

$$f(x) = \log_{2}(3x-1)$$

$$f(x) = 5^{\frac{x}{2}-1}$$

نکته مهم:

توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی یک به یک هستند.

مثال:

در تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ با افزایش x تابع زیاد می شود ← اکیداً صعودی ← یک به یک

تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} 3x-1$ با افزایش x با توجه به پایه لگاریتم $\left(\frac{1}{2}\right)$ مقدار لگاریتم کاهش پیدا می کند اکیداً نزولی و یک به یک

چند نکته مهم:

اگر f و g اکیداً صعودی باشند $f+g$ اکیداً صعودی است و یک به یک است.

اگر f و g اکیداً نزولی باشند $f+g$ اکیداً نزولی و یک به یک است.

مثال:

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-\frac{1}{x^3}$ با شرط $x>0$ چگونه است؟

$\sqrt[3]{x^3+1}$ اکیداً صعودی

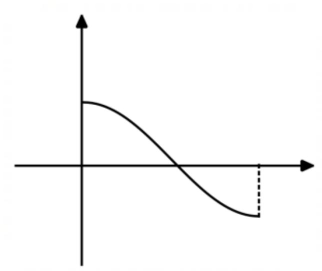
$x^3 \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} \frac{1}{x^3}$ اکیداً نزولی $\to -\frac{1}{x^3}$ اکیداً صعودی

در نتیجه $f(x)$ اکیداً صعودی و یک به یک

اگر f و g صعودی باشند و $f(x)$ و $g(x)$ مثبت باشند $f\times g$ صعودی است و به طور مشابه اگر

هردو نزولی باشند $f\times g$ نزولی است.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\cos x$$



$x^2 \xrightarrow{\text{صعودی}} \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{نزولی}}$

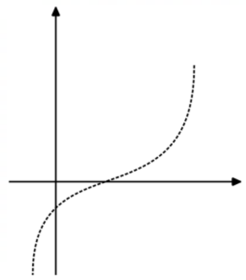
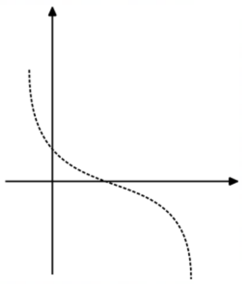
$0<\cos x<\pi$ نزولی

$f(x)=\frac{1}{x^2}\cos x$ اکیداً نزولی

اکیداً یکنوا

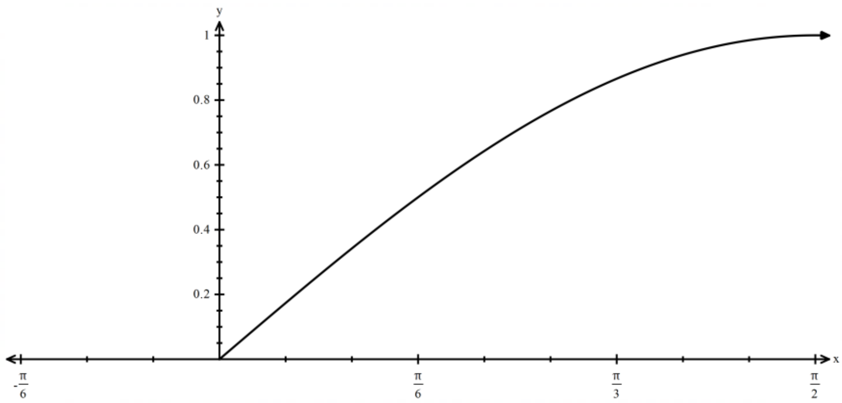
اگر f صعودی باشد $-f$ نزولی

و اگر f نزولی باشد $-f$ صعودی است.

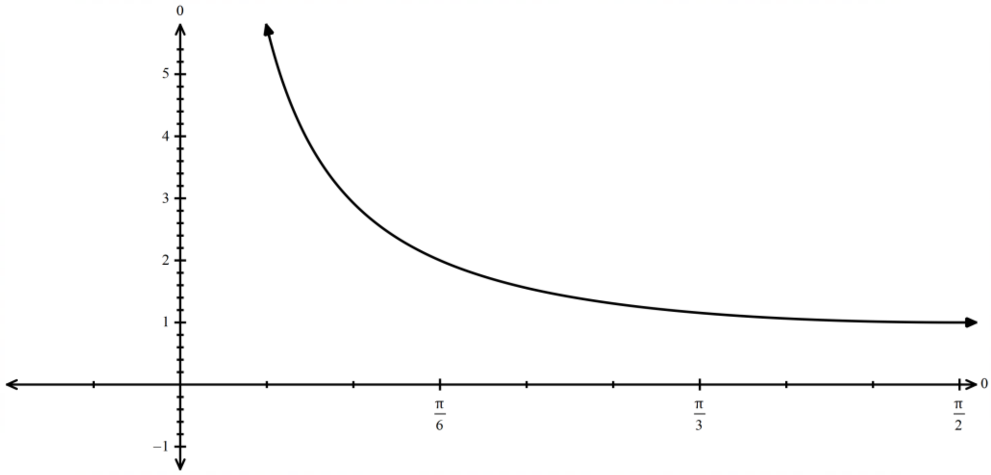
$y = f(x)$   $y = -f(x)$

اگر f صعودی و مقادیر f مثبت باشند $\frac{1}{f}$ نزولی و اگر f نزولی و مقادیر f مثبت باشند $\frac{1}{f}$ صعودی است.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \sin x$



$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{\sin x}$



اگر f , g صعودی fog صعودی

اگر f , g نزولی fog صعودی

اگر g نزولی f صعودی یا بر عکس fog نزولی

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

این تابع ترکیب $\sqrt[3]{x}$ و $2x+1$ است که هر دو اکیداً صعودی هستند در نتیجه f اکیداً صعودی و یک به یک است.

اگر یکی از تابع ها صعودی و یکی نزولی باشد ترکیب نزولی است.

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $f(x) = \cos(sinx)$

در بازه $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ تابع sin اکیداً صعودی و تابع $cos\ x$ اکیداً نزولی است، ترکیب آن ها اکیداً نزولی و تابع معکوس پذیر است.

مثال: حدود m برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \le 1 \\ mx+5 & x > 1 \end{cases}$ یک به یک باشد کدام است؟

۱) $m \ge -1$ $\qquad$ ۲) $m > 0$ $\qquad$ ۳) $m \le -1$ $\qquad$ ۴) $m < 0$

$3x+1 \xrightarrow{x=1} 4$ فقط انتهایی ضابطه اول $(-\infty\,,4)$

$mx+5 \xrightarrow{x=1} m+5$ نقطه ابتدایی ضابطه دوم

$(m+5\,,+\infty)$

$m+5 \ge 4$ $\qquad$ $m \ge -1$ $\qquad$ ①

از طرفی ضابطه دوم نیز باید اکیداً صعودی یعنی $m > 0$ $\qquad$ ②

$① \cap ②$ $\qquad$ $m > 0$

خلاصه در توابع چند ضابطه ای نباید اشتراک برد داشته باشیم و هر دو یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی و یا اکیداً یکنوا باشند.