ریاضی روی خط

ایرج قمصری

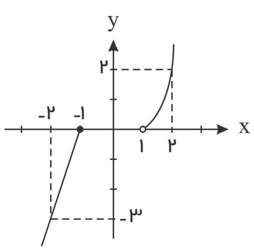
۱ - حدود m برای آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & ;x\leq ۱ \\ mx+۵ & ;x>۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

① $m\geq -۱$ ② $m>۰$ ③ $m\leq -۱$ ④ $m<۰$

۲ - تابع وارون تابع $y=x+\sqrt{x}$ به صورت $y=(\frac{\sqrt{ax+۱}-۱}{b})^۲$ می‌باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۳ - نمودار $y=f(x+۲)$ داده شده است. حاصل عبارت $A=\frac{f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۲)}{۱+f^{-۱}(-۳)}$ کدام است؟



① ۵ ② -۱

③ صفر ④ ۲

۴- تابع $f(x)=\dfrac{ax+۲}{x+۳}$ نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم تقارن دارد. حاصل $f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) -۸

۵- در تابع $f=\{(-۱,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۲,۲)\}$، رابطهٔ $f(۱-f(x_۰))=f(x_۰)$ برقرار است، $x_۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۶- تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases} x^۴+۲ & x<۰ \\ -۳x & x>۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \sqrt[۴]{x-۲} & x>۲ \\ \frac{۱}{۳}x & x<۰ \end{cases}$

۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} -\sqrt[۴]{x+۲} & x>۲ \\ \frac{۱}{۳}x & x<۰ \end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} \sqrt[۴]{x-۲} & x>۲ \\ -\frac{۱}{۳}x & x<۰ \end{cases}$

۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases} -\sqrt[۴]{x-۲} & x>۲ \\ -\frac{۱}{۳}x & x<۰ \end{cases}$

۷- اگر $g^{-۱}=\sqrt{f(x)}+۳$ و $h(x)=۲x^۲+x$ و $f(۰)=۴$ باشد، آنگاه a چه عددی باشد تا $(foh^{-۱}og)(a)=۴$ برقرار باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

بی‌نام

۸ – کدام‌یک از توابع زیر، وارون‌پذیر است؟

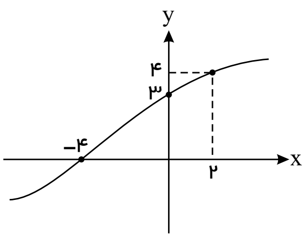
① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & ; & x>۰\\ \sqrt{-x} & ; & x\le ۰\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & ; & x\ge ۰\\ -\dfrac{۱}{x} & ; & x<۰\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; & x\ge ۰\\ -x^{۲} & ; & x<۰\end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & ; & x\ge ۰\\ -|x| & ; & x<۰\end{cases}$

۹ – اگر نمودار تابع $f^{-۱}(x+۱)$ به شکل روبرو باشد، حاصل $f(f(۴))+f(۰)$ کدام است؟



① ۰

② ۱

③ -۱

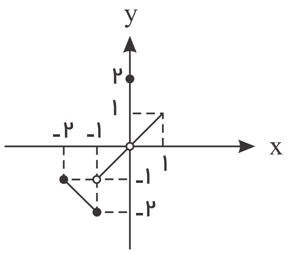
④ -۲

بی نام

۱۰- اگر دامنه و برد تابع یک‌به‌یک f برابر با $\mathbb{R}$ و جواب نامعادلهٔ $f(x) \leq x$ به‌صورت $[۴, +\infty)$ باشد، دامنهٔ عبارت $\sqrt{f^{-۱}(x) - f(x)}$ کدام است؟

① $(-\infty, ۴]$ ② $[-۴, ۴]$ ③ $[۴, +\infty)$ ④ قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۱- اگر $f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۱}{۱-۲x}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به‌صورت زیر باشد، در این‌صورت به‌ازای چه مقداری از a، $f(g^{-۱}(a)) = ۱$ است؟



① -۲
② -۱
③ ۱
④ صفر

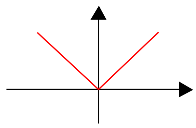
۱۲- اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = ۲x - |x| + ۱$ با نمودار تابع وارونش نقطهٔ $A(a, b)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

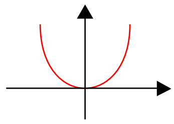
① -۱ ② صفر ③ ۱ ④ ۲

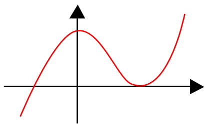
۱۲- ضابطهٔ معکوس تابع $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۱$ با شرط $x \geq ۱$ کدام است؟

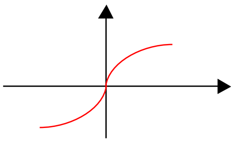
① $f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ + \sqrt{x}}$ ② $f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{x}}$ ③ $f^{-۱}(x) = -\sqrt{۱ + \sqrt{x}}$ ④ $f^{-۱}(x) = -\sqrt{۱ - \sqrt{x}}$

۱۴ – نمودار کدام یک از توابع زیر دارای تابع معکوس است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵ – ضابطه‌ی تابع معکوس $y = x^4 - 2x^2 + 1$ با شرط $x \geq 1$ کدام است؟

۱) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ ۲) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ ۳) $y = -\sqrt{1 + \sqrt{x}}$ ۴) $y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}}$

۱۶ – تابع $f(x) = |x-1| + |x+a|$ به ازای کدام مقادیر a روی $[2, +\infty)$ یک‌به‌یک است؟

۱) $a \geq -1$ ۲) $a \geq -2$ ۳) $a \leq -1$ ۴) $-2 \leq a \leq -1$

۱۷ – وارون تابع $f(x) = 3x + |x-3|$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{4} & x \geq 9 \\ \dfrac{x-3}{2} & x < 9 \end{cases}$

۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{3} & x \geq 9 \\ \dfrac{x+2}{3} & x < 9 \end{cases}$

۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{3} & x < 9 \\ \dfrac{x+2}{3} & x \geq 9 \end{cases}$

۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & x \geq 9 \\ \dfrac{x+3}{4} & x < 9 \end{cases}$

۱۸ – تابع خطی f و وارون آن یکدیگر را هیچ‌گاه قطع نمی‌کنند. اگر $f(2) = 5$ باشد، $f(6)$ کدام است؟ (دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

۱۹ - طول نقاط برخورد تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۲}$ و وارونش کدام است؟

① ۱ و ۲ ② ۱ و -۱ ③ -۱ و ۲ ④ ۲ و صفر

۲۰ - بیش‌ترین مقدار صحیح a برای آن‌که تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+a & x<۲ \end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ -۳ ④ -۴

۲۱ - اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۱),(۱,a^۲-۲),(b+۴,۲)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

① ۵ ② -۵ ③ ۱ ④ صفر

۲۲ - برای کدام مقدار m تابع $y=\frac{۲x+m+۴}{x+m}$ یک به یک نیست؟

① -۴ ② ۴ ③ ۳ ④ -۳

۲۳ - تابع $f=\left\{(m^۲-۴,۴),(n^۲-۱,۵),(۱۲,۴),(۸,۵),(m+n+۵,۹)\right\}$ یک به یک است، $۲m+۳n$ چند مقدار متفاوت دارد؟

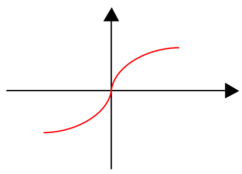
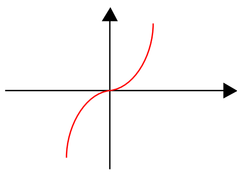
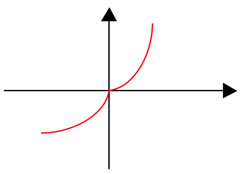
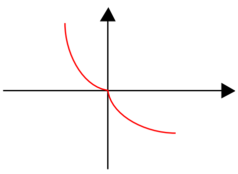
① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۱

بی نام

۲۴- اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ به‌ازای $x>0$ تعریف شده باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{1}{x})-f^{-1}(\frac{-1}{x})$ کدام است؟

(۱) صفر　(۲) $\frac{2}{x}$　(۳) $\frac{3x^2+2}{3x}$　(۴) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}$

۲۵- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ کدام است؟

(۱) 
(۲) 
(۳) 
(۴) 

۲۶- اگر $f=\{(-1,1),(2,0),(1,2)\}$ و $g=\{(1,-1),(2,1),(3,0)\}$ تابع $g^{-1}of$ کدام است؟

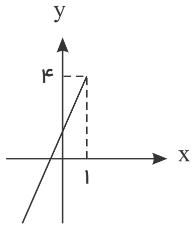
(۱) $\{(-1,2),(2,3)\}$　(۲) $\{(-1,1),(2,0)\}$　(۳) $\{(-1,3),(2,0)\}$　(۴) $\{(-1,2),(1,1)\}$

۲۷- تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x}-۱ & x\geq ۰\\ ax+b & x<۰\end{cases}$ در چه شرایطی یک به یک است؟

① $\begin{cases}a<۰\\ b\leq -۱\end{cases}$
② $\begin{cases}a\leq ۰\\ b<-۱\end{cases}$
③ $\begin{cases}a>۰\\ b\geq -۱\end{cases}$
④ $\begin{cases}a\geq ۰\\ b>-۱\end{cases}$

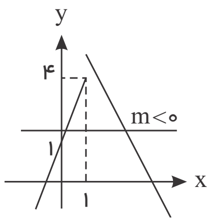
پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲



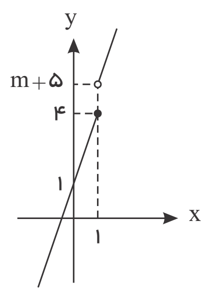
نمودار قسمت اول تابع $(x \le 1)$ به‌صورت روبه‌رو است. با توجه به این‌که قسمت دوم تابع نیز به‌صورت یک خط راست با شیب m می‌باشد، واضح است که m نباید منفی شود، زیرا اگر m منفی باشد، حالتی مانند نمودار دوم رخ می‌دهد که در این‌صورت می توان خطی موازی محور xها یافت که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند. (رد گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴»)

همچنین m نباید برابر با صفر شود زیرا در این‌صورت تابع ثابت خواهد شد و یک‌به‌یک نمی‌شود.



با شرط $m > 0$، نمودار تابع به‌صورت زیر می‌شود. برای آن‌که این نمودار مربوط به یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید شرط $m + 5 \ge 4$ برقرار باشد که در نتیجه:

$$\begin{cases} m + 5 \ge 4 \Rightarrow m > -1 \\ m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > 0$$



۲ ـ گزینه ۲

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون ابتدا x را برحسب y به‌دست می آوریم و سپس جای x و y را عوض می کنیم.

$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4y+1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4y+1}}{2} \Rightarrow x = (\frac{\sqrt{4y+1} - 1}{2})^2$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y = (\frac{\sqrt{4x+1} - 1}{2})^2 = f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

۳ ـ گزینه ۱ طبق نمودار داریم:

$$x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow -3 = f(-2+2) = f(0) \Rightarrow f^{-1}(-3) = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = f(-1+2) = f(1) \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = f(2+2) = f(4) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

در نتیجه:

$$A = \frac{f^{-1}(0) + f^{-1}(2)}{1 + f^{-1}(-3)} = \frac{1+4}{1+0} = 5$$

۴ ـ گزینه ۲ نکته: اگر خط $y = x$ محور تقارن یک تابع باشد، آنگاه آن تابع با معکوس خودش برابر است.

نکته: شرط این که تابع $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با تابع معکوس خودش یکی باشد آن است که $a + d = 0$

f نسبت به خط $y = x$ متقارن $\Rightarrow f = f^{-1} \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x+2}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{6+2}{-2+3} = 8$$

۵ - گزینه ۲

$f=\{(-۱,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۲,۲)\}$

تابع f تابعی یک‌به‌یک است، پس از $f(u)=f(v)$ می‌توان نتیجه گرفت $u=v$، حال داریم:

$f(۱-f(x_۰))=f(x_۰)\Rightarrow ۱-f(x_۰)=x_۰\Rightarrow f(x_۰)=۱-x_۰$

فقط زوج مرتب $(۰,۱)$ در رابطهٔ فوق صدق می‌کند.

$x_۰=۰\Rightarrow f(۰)=۱-۰\Rightarrow f(۰)=۱$

۶ - گزینه ۴

$x<۰\to x^۴>۰\to x^۴+۲>۲\to y>۲ \quad (۱)$

$x>۰\Rightarrow -۳x<۰\to y<۰ \quad (۲) \qquad (۱)\cap(۲)=\varnothing\to$ تابع وارون‌پذیر است.

$y=x^۴+۲\to y-۲=x^۴\Rightarrow |x|=\sqrt[۴]{y-۲}\xrightarrow{x<۰}-x=\sqrt[۴]{y-۲}$

$\Rightarrow x=-\sqrt[۴]{y-۲}\to y=-\sqrt[۴]{x-۲}\ \ ,\ \ x>۲$

$y=-۳x\to x=-\frac{۱}{۳}y\to y=-\frac{۱}{۳}x\ ,\ x<۰$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}-\sqrt[۴]{x-۲} & x>۲\\ -\frac{۱}{۳}x & x<۰\end{cases}$$

۷ - گزینه ۴

چون $f(۰)=۴$ است و نیز می‌دانیم $f(h^{-۱}og(a))=۴$ ، لذا داریم:

$h^{-۱}og(a)=۰\Rightarrow h^{-۱}(g(a))=۰$

از طرفی می‌دانیم $f^{-۱}(a)=b\leftrightarrow f(b)=a$ درنتیجه:

$h^{-۱}(g(a))=۰\leftrightarrow h(۰)=g(a)$

$h(x)=۲x^۲+x\Rightarrow h(۰)=۰\xrightarrow[h(۰)=۰]{h(۰)=g(a)}g(a)=۰$

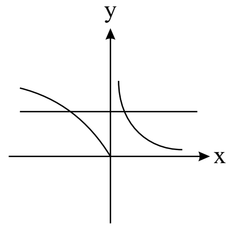
طبق اطلاعات سوال می‌دانیم که در نقطهٔ $x=۰$ مقدار تابع f برابر ۴ است. پس داریم:

$x=۰\Rightarrow g^{-۱}(۰)=\sqrt{f(۰)}+۳\Rightarrow g^{-۱}(۰)=\sqrt{۴}+۳=۲+۳=۵\Rightarrow g^{-۱}(۰)=۵$

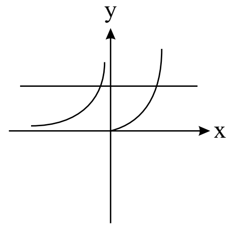
از طرفی طبق نکتهٔ بالا $f^{-۱}(a)=b\leftrightarrow f(b)=a$ درنتیجه:

$g^{-۱}(۰)=۵\leftrightarrow g(۵)=۰\xrightarrow[g(۵)=۰]{g(a)=۰}a=۵$

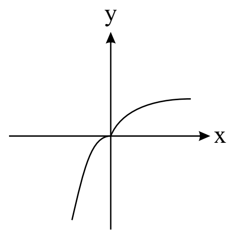
۸ - گزینه ۳ نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم. اگر خطی موازی محور x ها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

(۱) 

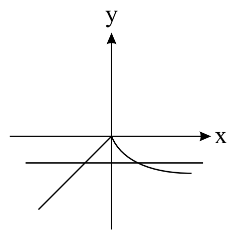
$\longrightarrow$ وارون پذیر نیست.

(۲) 

$\longrightarrow$ وارون پذیر نیست.

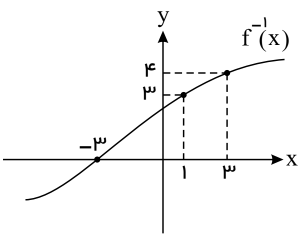
(۳) 

$\longrightarrow$ وارون پذیر است.

(۴) 

$\longrightarrow$ وارون پذیر نیست.

۹ - گزینه ۴ اگر نمودار تابع $f^{-۱}(x+۱)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $f^{-۱}(x)$ حاصل می‌شود.



بی نام

با توجه به نمودار بالا:

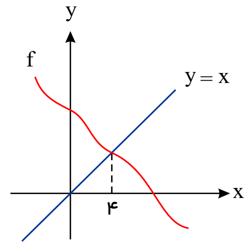
$$\begin{cases} f^{-۱}(-۳) = ۰ \Rightarrow f(۰) = -۳ \\ f^{-۱}(۱) = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۱ \\ f^{-۱}(۳) = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} f(\underbrace{f(۴)}_{۳}) = f(۳) = ۱ \\ f(۰) = -۳ \end{cases} \Rightarrow f(f(۴)) + f(۰) = ۱ + (-۳) = -۲$$

۱۰ - گزینه ۳ جواب نامعادلهٔ $f(x) \leq x$ به‌صورت $[۴, +\infty)$ است یعنی در این بازه نمودار $y = f(x)$ برابر یا زیر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یعنی خط $y = x$ قرار دارد، باتوجه به این‌که تابع f یک‌به‌یک است، نمودار f به‌طور تقریبی به‌صورت زیر است.

$$\sqrt{f^{-۱}(x) - f(x)} \Rightarrow f^{-۱}(x) - f(x) \geq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) \geq f(x)$$



باتوجه به نمودار تقریبی f، در بازهٔ $[۴, +\infty)$ نمودار $f^{-۱}(x)$ بالاتر از $y = x$ و چون $f(x) \geq x$ پس بالاتر از $f(x)$ قرار دارد، پس داریم:

$f^{-۱}(x) \geq f(x) \Rightarrow x \geq ۴ \Rightarrow$ جواب $= [۴, +\infty)$

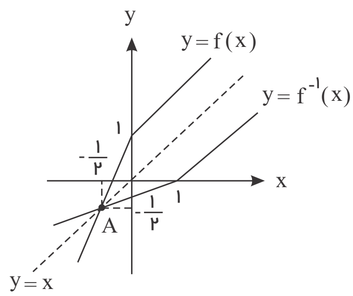
۱۱ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$f\left(g^{-۱}(a)\right) = ۱ \longrightarrow f^{-۱}(۱) = g^{-۱}(a) \longrightarrow \frac{۱+۱}{۱-۲} = g^{-۱}(a)$$

$$\longrightarrow g^{-۱}(a) = -۲ \longrightarrow g(-۲) = a \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} a = -۱$$

۱۲ - گزینه ۱ تابع را دو ضابطه‌ای کرده و رسم می‌کنیم:

$$f(x) = ۲x - |x| + ۱ = \begin{cases} x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ ۳x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم $(y = x)$ قرینه می‌کنیم. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y = x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x < ۰ : ۳x + ۱ = x \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow A(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}) \Rightarrow a + b = -\frac{۱}{۲} + (-\frac{۱}{۲}) = -۱$$

۱۳ - گزینه ۱

$$y = (x^۲ - ۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{y} = \left|x^۲ - ۱\right| \xrightarrow{x \geq ۱} x^۲ - ۱ = \sqrt{y}$$

$$x^۲ = ۱ + \sqrt{y} \Rightarrow |x| = \sqrt{۱ + \sqrt{y}} \xrightarrow{x \geq ۱} x = \sqrt{۱ + \sqrt{y}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ + \sqrt{x}}$$

۱۴ - گزینه ۴

برای آن‌که تابع معکوس‌پذیر باشد باید یک‌به‌یک باشد پس جواب گزینه‌ی (۴) است.

توجه: برای بررسی یک به یک بودن یک نمودار، خطوط موازی محور xها را رسم می‌کنیم، برای یک به یک بودن باید حداکثر یکبار محور xها را قطع کند.

۱۵ - گزینه ۱ راه اول: باید x را تنها کنیم. در توابع با درجه‌ی بالاتر باید سعی کنیم به یک اتحاد تبدیل کنیم.

$$y = x^۴ - ۲x^۲ + ۱ = (x^۲ - ۱)^۲ \quad \Rightarrow \quad x^۲ - ۱ = \pm\sqrt{y} \quad \xrightarrow{x^۲ - ۱ \geq ۰} \quad x^۲ - ۱ = \sqrt{y}$$

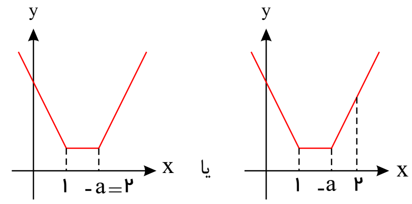
$$x^۲ = ۱ + \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{۱ + \sqrt{y}} \quad \xrightarrow{x \geq ۱} \quad x = \sqrt{۱ + \sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{y \to x} \quad f^{-۱}(x) = \sqrt{۱ + \sqrt{x}}$$

راه دوم:

$$\begin{cases} f(۱)=۰ \Rightarrow f^{-۱}(۰)=۱ & \text{گزینه‌های ۳، ۴ غلط است} \\ f(۲)=۹ \Rightarrow f^{-۱}(۹)=۲ & \text{گزینه‌ی ۲ غلط است} \end{cases}$$

۱۶ - گزینه ۲ می‌دانیم نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+|x+a|$ بصورت گلدانی است. برای اینکه تابع در بازه $[۲,+\infty)$ یک به یک باشد، باید نمودار آن به یکی از دو صورت زیر باشد.



یعنی باید $-a \le ۲$ باشد که داریم:

$$-a \le ۲ \Rightarrow a \ge -۲$$

۱۷ - گزینه ۱ برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع می‌توانیم از روش عددگذاری استفاده کنیم. به این صورت که یک x دلخواه به تابع بدهیم و y را به‌دست آوریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و در گزینه‌ها تست می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=۱} f(۱)=۳(۱)+|۱-۳|=۵ \Rightarrow \left|\begin{matrix}۱\\۵\end{matrix}\right. \in f \Rightarrow \left|\begin{matrix}۵\\۱\end{matrix}\right. \in f^{-۱}$$

نقطهٔ $(۵,۱)$ تنها در گزینهٔ «۱» صدق می‌کند.

۱۸ - گزینه ۳ تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ زمانی با وارونش یعنی $f^{-۱}$ غیرمتقاطع است که $a=۱$ و $b \neq ۰$ باشد، پس:

$$f(x)=x+b \xrightarrow{f(۲)=۵} ۵=۲+b \Rightarrow b=۳$$

پس $f(x)=x+۳$ و در نتیجه $f(۶)=۶+۳=۹$ است.

۱۹ - گزینه ۲ تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۲}$ را می‌یابیم.

$$y=\frac{۲x+۱}{x+۲} \Rightarrow ۲x+۱=xy+۲y \Rightarrow x(۲-y)=۲y-۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲y-۱}{۲-y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x-۱}{۲-x}$$

حال $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ را قطع می‌دهیم.

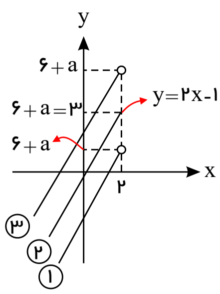
$$f^{-۱}x=f(x) \Rightarrow \frac{۲x-۱}{۲-x}=\frac{۲x+۱}{x+۲} \Rightarrow (۲x-۱)(x+۲)=(۲x+۱)(۲-x)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۴x-x-۲=۴x-۲x^۲+۲-x \Rightarrow x=\pm ۱$$

۲۰ - گزینه ۳

نمودار تابع با توجه به مثبت بودن شیب دو نیم خط می تواند به یکی از ۳ حالت زیر باشد.

در حالت‌های ۱ و ۲ تابع یک به یک و وارون‌پذیر است، پس داریم:



$$۶+a \le ۳ \Rightarrow a \le -۳ \to a_{\max}=-۳$$

۲۱ - گزینه ۲

$(۱,۲),(۱,a^۲-۲)$ تابع است. $f \Rightarrow a^۲-۲=۲ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$

$(b+۴,۲),(۱,۲)$ یک‌به‌یک است $f \Rightarrow b+۴=۱ \Rightarrow b=-۳$

$$\begin{cases} a+b=-۲-۳=-۵ \\ a+b=۲-۳=-۱ \end{cases}$$

۲۱ - گزینه ۲ نکته: تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ زمانی یک به یک نمی‌باشد که: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ باشد.

$$\frac{۲}{۱}=\frac{m+۴}{m} \Rightarrow ۲m=m+۴ \to m=۴$$

۲۳ ـ گزینه ۲

$$(m^2-4,4),(12,4) \Rightarrow m^2-4=12 \rightarrow m^2=16 \rightarrow m=\pm 4$$
$$(n^2-1,5),(8,5) \Rightarrow n^2-1=8 \rightarrow n^2=9 \Rightarrow n=\pm 3$$

$m=4\ ,\ n=3 \rightarrow f=\{(12,4),(8,5),(12,9)\} \rightarrow$ تابع نیست

$m=4\ ,\ n=-3 \rightarrow f=\{(12,4),(8,5),(6,9)\}$ قابل قبول $\rightarrow 2m+3n=-1$

$m=-4\ ,\ n=3 \rightarrow f=\{(12,4),(8,5),(4,9)\}$ قابل قبول $\rightarrow 2m+3n=1$

$m=-4\ ,\ n=-3 \rightarrow f=\{(12,4),(8,5),(-2,9)\}$ قابل قبول $\rightarrow 2m+3n=-17$

۲۴ ـ گزینه ۲ ابتدا معکوس تابع $y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ را می‌یابیم.

$$y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}) \Rightarrow 2y=\frac{x^2-1}{x} \Rightarrow x^2-2xy-1=0$$

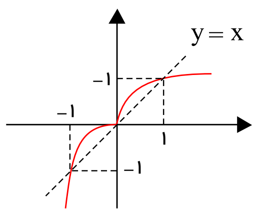
$$\xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{حل معادله‌ی}} x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1} \xrightarrow[x>0]{\text{چون}} x=\sqrt{y^2+1}+y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}+x \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \\ f^{-1}(\frac{-1}{x})=\frac{-1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{x})-f^{-1}(\frac{-1}{x})=\frac{2}{x}$$

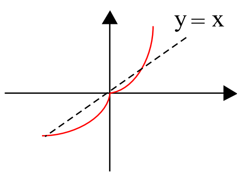
۲۵ ـ گزینه ۳ ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز اول و سوم رسم می‌نماییم.

توجه: هر تابع معکوس پذیری با معکوس خود نسبت به نیمساز اول و سوم قرینه است.

$f(x) \Rightarrow$



$f^{-1}(x) \Rightarrow$

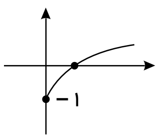


۲۶ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $g^{-1}of(x): x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_{g^{-1}}(x)$ و $g^{-1}=\{(-1,1),(1,2),(0,3)\}$

$$g^{-1}of(x):\begin{cases} -1\rightarrow 1\rightarrow 2 \Rightarrow (-1,2) \\ 2\rightarrow 0\rightarrow 3 \Rightarrow (2,3) \\ 1\rightarrow 2\ \ \times \end{cases} \Rightarrow g^{-1}of=\{(-1,2),(2,3)\}$$

۲۷ ـ گزینه ۱ با توجه به نمودار ضابطهٔ اول



معادلهٔ خط ضابطهٔ دوم نمی‌تواند دارای شیب منفی باشد پس $a>0$.

چون اگر شیب خط منفی باشد در هر صورت خط افقی نمودار کلی را در دو نقطه قطع می‌کند. عرض از مبدأ خط نیز می‌تواند حداکثر به دلیل مشابه با -1 برابر باشد پس $b\leq -1$.

بی نام

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۵ - ۲	۹ - ۴	۱۳ - ۱	۱۷ - ۱	۲۱ - ۲	۲۵ - ۳
۲ - ۲	۶ - ۴	۱۰ - ۳	۱۴ - ۴	۱۸ - ۳	۲۲ - ۲	۲۶ - ۱
۳ - ۱	۷ - ۴	۱۱ - ۲	۱۵ - ۱	۱۹ - ۲	۲۳ - ۲	۲۷ - ۱
۴ - ۲	۸ - ۳	۱۲ - ۱	۱۶ - ۲	۲۰ - ۳	۲۴ - ۲	