ریاضی روی خط
ایرج قمصری

۱ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

① $(-\infty,-۲)$ ② $(-\infty,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(۱,+\infty)$

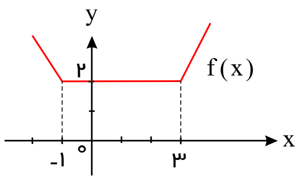
۲ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

① $(-\infty,۲)$ ② $(-۱,+\infty)$ ③ $(-۱,۲)$ ④ $(۲,+\infty)$

۳ - تابع $y=۲x+\frac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

① اکیداً صعودی ② اکیداً نزولی ③ هم صعودی و هم نزولی ④ غیر یکنوا

۴ - اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=f(۲+|x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟



① $[-۲,+\infty)$ ② $[۱,+\infty)$
③ $[-۱,+\infty)$ ④ $[-۳,+\infty)$

۵ - به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{۳m+۱}{۴})^x$ نزولی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ هیچ مقدار m

۶ - اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=۲^{-x}$ باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

① $f+g$ ② fg ③ $g-f$ ④ $\frac{f}{g}$

۱ - به‌ازای $x\in[a,b]$، تابع $f=\{(۱,۲x+۷),(-۲,۱۰-x),(۰,x^۲+۴)\}$ یک تابع صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۱ ④ ۲

۸ - اگر تابع f نزولی و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲)-f(|x-۱|)}$ کدام است؟

① $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ② $[-۱,۳]$ ③ $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ④ $\mathbb{R}$

۹ - اگر $y=f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $fof(x)$ کدام‌یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

① $y=۳+x$ ② $y=x^۹$ ③ $y=۴-x$ ④ $y=۲x-۱$

۱۰ - اگر f در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)}$ کدام است؟

① $[۲,+\infty)$ ② $[-۲,۲]$ ③ $(-\infty,۰]$ ④ $[-۳,۲]$

۱۱ - بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=\left(\dfrac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

① $(-۱,\frac{۱}{۳})$ ② $(-۲,\frac{۱}{۳})$ ③ $(-۳,\frac{۱}{۳})$ ④ $(-۴,\frac{۱}{۳})$

۱۲ - کدام‌یک از توابع زیر در طول دامنهٔ تعریف خود نزولی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=x+|x|$ ② $y=x-[x]$ ③ $y=|x|+|x-۱|$ ④ $y=x\left(\dfrac{۱}{[x]+[-x]}\right)$

۱۳ - در بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

۱۴ - حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(۵,۶),(۳,m^۲-m),(-۴,۲),(۴,m^۲-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

① $(-۲,۱)\cup(۲,۳)$ ② $[-۲,۳]-(-۱,۲)$ ③ $[-۲,۳]-[-۱,۲]$ ④ $[-۲,۱]\cup[۲,۳]$

۱۵ - اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۴}{f(۳-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

① صفر ② ۲ ③ ۳ ④ بی‌شمار

۱۶ - به‌ازای چه مقداری از a، تابع $f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\leq -۱\\ -\dfrac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱\\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\geq ۱\end{cases}$ اکیداً نزولی خواهد بود؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ -۱ ④ $-\frac{۳}{۲}$

۱۷ - اگر f تابعی نزولی غیرثابت باشد که نمودار آن بالای محور xها قرار دارد، توابع $g(x)=x-f(x)$ و $h(x)=\dfrac{۱}{f(-x)}$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟

① نزولی - نزولی ② صعودی - نزولی ③ نزولی - صعودی ④ صعودی - صعودی

۱۸ - اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $g(x)=\sqrt{(x^۳-x)f(x)}$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ -۱ ④ ۲

۱۹ - اگر ضابطهٔ تابع f به صورت
$$f(x)=\begin{cases}-x^۲+۶x-۵ & , x>۳\\ \dfrac{۴}{۵}x+\dfrac{۸}{۵} & , -۲\leq x\leq ۳\\ x^۲+۶x+۸ & , x<-۲\end{cases}$$
باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

① ۲ ② ۵ ③ ۶ ④ ۳

۲۰ - برای مقادیر حقیقی b همواره داریم $f(۲b^{۲}+۱)>f(۳b)$ تابع $f(x)$ بر روی کدام بازه نزولی اکید خواهد بود؟

① $(\frac{۳}{۲},۳)$ ② $(\frac{۱}{۲},۱)$ ③ $\mathbb{R}$ ④ $\varnothing$

۲۱ - تابع $f(x)=\cos(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۴})$ روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},k]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار k کدام است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② ۱ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۲

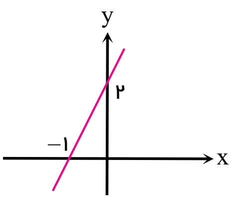
۲۲ - به ازای کدام مقدار a تابع $y = ۲x + a\left|x - ۱\right|$ غیر یکنواست؟

① ۱ ② -۱ ③ ۳ ④ $\frac{۱}{۲}$

۲۳ - اگر $f = \{(۱,۲), (-۱,\circ), (\circ,[a])\}$ و $g(x) = ۲^x$ باشند، به ازای حداکثر چه مقادیری از a تابع $f+g$ صعودی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

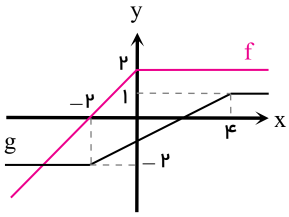
① $[\circ,۳]$ ② $[\circ,۴)$ ③ $[-\frac{۱}{۲},۳]$ ④ $[-\frac{۱}{۲},۴]$

۲۴ - نمودار تابع f به صورت مقابل است، تابع $y = (x - f(x))(x + ۳)$ در بازهٔ $(a \; , \; +\infty)$ یکنواست. حداقل a کدام است؟



① $\frac{۵}{۲}$ ② $-\frac{۵}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

۲۵ - نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. نمودار تابع $f - g$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟



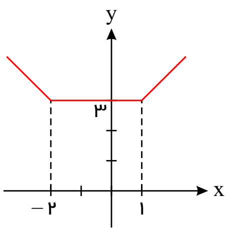
① $(-۲\ ,\ ۰)$
② $(۰\ ,\ ۴)$
③ $(-۲\ ,\ ۴)$
④ $(-\infty\ ,\ -۴)$

۲۶ - تابع $y = \sin(a\pi x)$ در بازه $[-۲\ ,\ ۲]$ صعودی است، حدود a کدام است؟

① $۰ < a \leq \frac{۱}{۴}$
② $|a| \leq \frac{۱}{۴}$
③ $|a| \geq \frac{۱}{۴}$
④ $۰ < a < \frac{۱}{۲}$

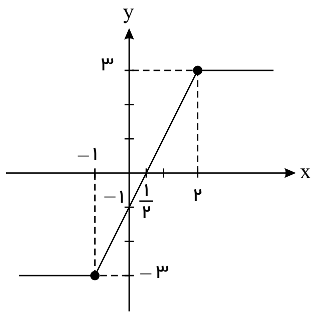
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x = -۲$ و $x = ۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً نزولی : $x < -۲$ $\rightarrow$

۲ - گزینه ۳ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x = -۱$ و $x = ۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.

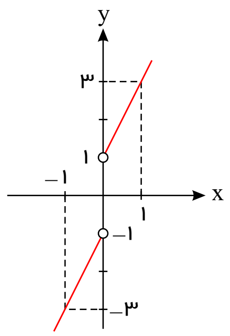


اکیداً صعودی : $-۱ < x < ۲$ $\longrightarrow$

۳ - گزینه ۱ ابتدا به صورت مشروط قدر مطلق را از بین می‌بریم:

$$x > ۰ \to y = ۲x + \frac{x}{x} \to y = ۲x + ۱$$
$$x < ۰ \to y = ۲x + \frac{-x}{x} \to y = ۲x - ۱$$

اکنون دو خط داده شده را با توجه به شرط رسم می‌کنیم.

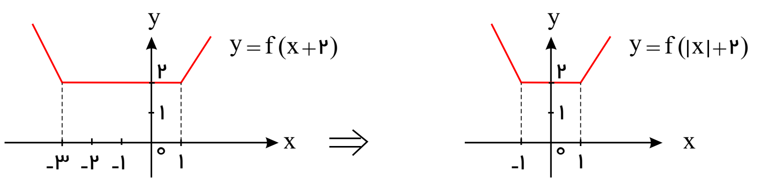


$\longrightarrow$ تابع اکیداً صعودی است

۴ - گزینه ۳

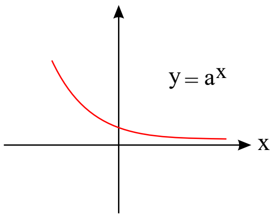
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{x \to x+۲} y = f(x+۲) \xrightarrow{x \to |x|} y = f(|x|+۲)$$

در نمودار $y = f(x+۲)$ سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینهٔ سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها یافته و به شکل اضافه می‌کنیم تا نمودار $y = f(|x|+۲)$ حاصل شود.



زرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(|x|+۲)$ در آن بازه صعودی است بازهٔ $[-۱, +\infty)$ است.

۵ - گزینه ۲ تابع $y=a^x$ به‌ازای $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی است و به صورت



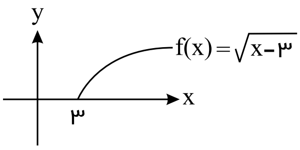
است و به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است

پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$۰ \le \frac{۳m+۱}{۴} \le ۱ \to ۰ \le ۳m+۱ \le ۴ \to -۱ \le ۳m \le ۳ \to \frac{-۱}{۳} \le m \le ۱$$

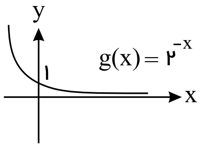
که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

۶ - گزینه ۳



$\Rightarrow$ f اکیداً صعودی

$g(x)=۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x \Rightarrow$



$\Rightarrow$ g اکیداً نزولی

چون f اکیداً صعودی است، پس $-f$ اکیداً نزولی است و می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی تابعی اکیداً نزولی است. پس تابع $g-f=g+(-f)$ اکیداً نزولی است.

۷ - گزینه ۳ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

$$f=\{(-۲,۱۰-x),(۰,x^۲+۴),(۱,۲x+۷)\}$$

در تابع صعودی با افزایش x، مقدار y ثابت مانده یا افزایش می‌یابد، پس باید $۱۰-x \le x^۲+۴ \le ۲x+۷$ باشد.

$$۱۰-x \le x^۲+۴ \to x^۲+x-۶ \ge ۰ \to (x+۳)(x-۲) \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \le -۳ \text{ یا } x \ge ۲ \quad (I)$$

$$x^۲+۴ \le ۲x+۷ \to x^۲-۲x-۳ \le ۰ \to (x-۳)(x+۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le x \le ۳ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲ \le x \le ۳$ می‌رسیم.

$$x \in [۲,۳] \to b-a=۳-۲=۱$$

۸ - گزینه ۳ در تابع نزولی به‌ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه اگر $x_۱ < x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱) \ge f(x_۲)$ است. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(۲)-f(|x-۱|) \ge ۰ \to f(۲) \ge f(|x-۱|) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} ۲ \le |x-۱|$$

$$\to \begin{cases} x-۱ \ge ۲ \to x \ge ۳ \\ \text{یا} \\ x-۱ \le -۲ \to x \le -۱ \end{cases} \to x \in (-\infty,-۱] \cup [۳,+\infty)$$

۹ - گزینه ۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲) \Rightarrow f\left(f(x_۱)\right) < f\left(f(x_۲)\right) \Rightarrow (fof)(x_۱) < (fof)(x_۲)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲) \Rightarrow f\left(f(x_۱)\right) < f\left(f(x_۲)\right) \Rightarrow (fof)(x_۱) < (fof)(x_۲)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

بنابراین اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد آن‌گاه تابع fof در هر صورت اکیداً صعودی است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است و نمی‌تواند fof باشد. (گزینهٔ سوم خطی است با شیب منفی)

۱۰ - گزینه ۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \le f(b)$ آن‌گاه $a \ge b$.

$$y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)} \Rightarrow f(|x|)-f(۲) \ge ۰ \Rightarrow f(|x|) \ge f(۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x| \le ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow \text{دامنه} = [-۲,۲]$$

۱۱ - گزینه ۲ تابع نمایی $f(x)=a^x$ با شرط $a>۱$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

$$y=\left(\frac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x \Rightarrow \frac{۵-k}{۱-۳k} > ۱ \Rightarrow \frac{۵-k}{۱-۳k}-۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۵-k-۱+۳k}{۱-۳k} > ۰$$

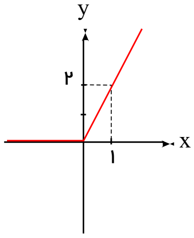
$$\Rightarrow \frac{2k+4}{1-3k} > 0 \Rightarrow$$

k	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\frac{2k+4}{1-3k}$		$-$	0	$+$	ن	$-$	

$$\Rightarrow -2 < k < \frac{1}{3}$$

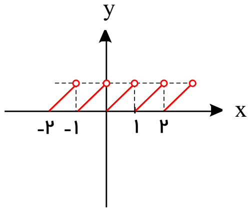
۱۲ - گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱) $y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$



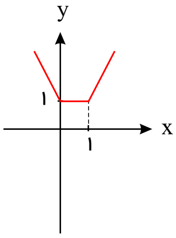
$\Rightarrow$ تابع صعودی است .

گزینه ۲) $y = x - [x] \Rightarrow$



$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است .

گزینه ۳) $y = |x| + |x-1| \Rightarrow$

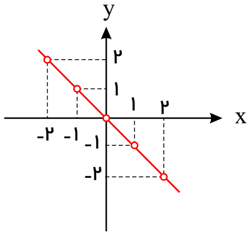


$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است .

گزینه ۴) توجه کنید که $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ است.

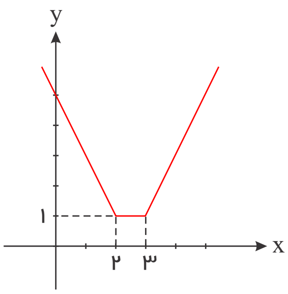
$$y = x\left(\frac{1}{[x]+[-x]}\right) \Rightarrow [x]+[-x] \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \Rightarrow y = x\left(\frac{1}{-1}\right) = -x$$

$y = -x \,,\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$



$\Rightarrow$ تابع نزولی است .

۱۳ - گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x < 2$ اکیداً نزولی است.



$$y = |x-2| + |x-3| \xrightarrow{x<2} y = -x+2-x+3 \rightarrow y = -2x+5$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x+5 \\ g(x) = 2x^2 - x - 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 - x - 10 = -2x + 5 \rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۱+۱۲۰=۱۲۱}\begin{cases} x=\dfrac{-۱+۱۱}{۴}=\dfrac{۵}{۲}(x<۲ \text{ غ ق ق (با توجه به}) \\ x=\dfrac{-۱-۱۱}{۴}=-۳ \quad \text{ق ق} \end{cases} \to \text{ در یک نقطه مشترک هستند}$$

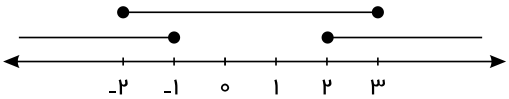
۱۴ - گزینه ۲ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\leq f(x_۲)$ است پس:

$$۲\leq m^۲-m\leq ۶\to\begin{cases} m^۲-m\geq ۲\to m^۲-m-۲\geq ۰\to (m-۲)(m+۱)\geq ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\leq -۱ \text{ یا } m\geq ۲ \quad (I) \\ m^۲-m\leq ۶\to m^۲-m-۶\leq ۰\to (m-۳)(m+۲)\leq ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\leq m\leq ۳ \quad (II) \end{cases}$$

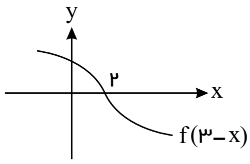
از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\to m\in[-۲,۳]-(-۱,۲)$$

۱۵ - گزینه ۲ f اکیداً صعودی و $y=۳-x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(۳-x)$ اکیداً نزولی است. چون $f(۱)=۰$ است، $x=۱$ صفر تابع $f(x)$ و $x=۲$ صفر تابع $f(۳-x)$ است.

پس به‌طور نمادین تابع $f(۳-x)$ به‌صورت مقابل است.



$$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۴}{f(۳-x)}}\Rightarrow \dfrac{x-۴}{f(۳-x)}\geq ۰\Rightarrow$$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$x-۴$		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(۳-x)$		$+$	۰	$-$		$-$	
$\dfrac{x-۴}{f(۳-x)}$		$-$	ن	$+$	۰	$-$	

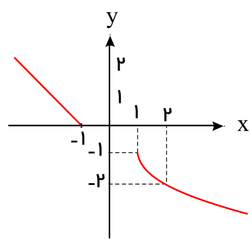
$۲<x\leq ۴\Rightarrow$ اعداد صحیح : ۳ و ۴

۱۶ - گزینه ۲ با رسم نمودار f داریم:

$$f(x)=\begin{cases} |x+۱| & ;x\leq -۱ \\ -\dfrac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱ \\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\geq ۱ \end{cases}\Rightarrow A\left|\begin{matrix} x=-۱ \\ y=\dfrac{۱}{۲}+a \end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix} x=۱ \\ y=-\dfrac{۱}{۲}+a \end{matrix}\right.$$

با توجه به نمودار زیر تابع f زمانی نزولی است که عرض نقطهٔ $A(-۱,\frac{۱}{۲}+a)$ کوچکتر یا مساوی صفر و عرض نقطهٔ $B(۱,-\frac{۱}{۲}+a)$ بزرگتر یا مساوی -۱ باشد، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{۱}{۲}+a\leq ۰\Rightarrow a\leq -\dfrac{۱}{۲} \\ -\dfrac{۱}{۲}+a\geq -۱\Rightarrow a\geq -\dfrac{۱}{۲} \end{matrix}\right\}\xRightarrow{\text{اشتراک}} a=-\dfrac{۱}{۲}$$



۱۷ - گزینه ۲ چون نمودار f بالای محور xها قرار دارد یعنی مقادیر تابع f همواره مثبت است، پس f تابعی نزولی با مقادیر مثبت است و داریم:

$$x_۱<x_۲\xrightarrow{\text{نزولی}} f(x_۱)\geq f(x_۲)\xrightarrow{\times(-۱)} -f(x_۱)\leq -f(x_۲)$$

س اگر f نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است. از طرفی جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است، پس:

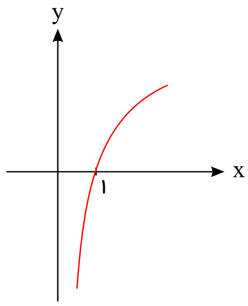
$g(x)=x+(-f(x))\Rightarrow$ g صعودی است.

$$x_۱<x_۲\Rightarrow -x_۱>-x_۲\xrightarrow{f \text{ نزولی}} f(-x_۱)\leq f(-x_۲)$$

$$\xrightarrow{\text{مقادیر } f \text{ مثبت‌اند.}} \frac{۱}{f(-x_۱)} \geq \frac{۱}{f(-x_۲)} \Rightarrow h(x_۱) \geq h(x_۲)$$

h نزولی است.

۱۸ - گزینه ۳ شکل فرضی



را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^۳ - x)f(x) \geq ۰ \to \begin{cases} x^۳ - x = ۰ \to x(x^۲ - ۱) = ۰ \to x = ۰ \ , \ x = \pm ۱ \\ f(x) = ۰ \to x = ۱ \end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$x^۳ + x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
عبارت ≥ ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$	

بنابراین دامنهٔ تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R} - (-۱, ۰)$ است پس:

$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \to a + b = -۱$$

۱۹ - گزینه ۳ تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

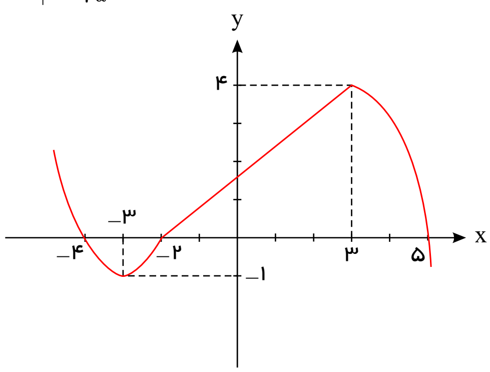
$$y_۱ = -x^۲ + ۶x - ۵ = -(x^۲ - ۶x + ۵) = -(x - ۱)(x - ۵) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = ۱ \ , \ x = ۵$$

$$\to S \left| \begin{matrix} \dfrac{-b}{۲a} \\ \dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{matrix} \right. \to S \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix} \right.$$

$$y_۲ = \frac{۴}{۵}x + \frac{۸}{۵} \to \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۰ \end{matrix} \right. \ , \ \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix} \right. \quad \text{دو نقطه برای رسم}$$

$$y_۳ = x^۲ + ۶x + ۸ = (x + ۴)(x + ۲) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = -۴ \ , \ x = -۲$$

$$\to S \left| \begin{matrix} \dfrac{-b}{۲a} \\ \dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{matrix} \right. \to S \left| \begin{matrix} -۳ \\ -۱ \end{matrix} \right.$$



ابع داده شده در بازهٔ $[-۳, ۳]$ اکیداً صعودی است و طول این بازه برابر ۶ است.

۲۰ - گزینه ۱

$$f(\underbrace{۲b^۲ + ۱}_{x_۱}) > f(\underbrace{۳b}_{x_۲})$$

تابع اکیداً نزولی است f: $\forall x_۱, x_۲ \in I : x_۱ < x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

با توجه به عبارت بالا کافی است بفهمیم در چه بازه‌ای (بازه‌ی I) رابطه‌ی $x_۱ < x_۲$ برقرار است:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2b^2+1<3b \Rightarrow 2b^2-3b+1=(2b-1)(b-1)<0 \Rightarrow \frac{1}{2}<b<1$$

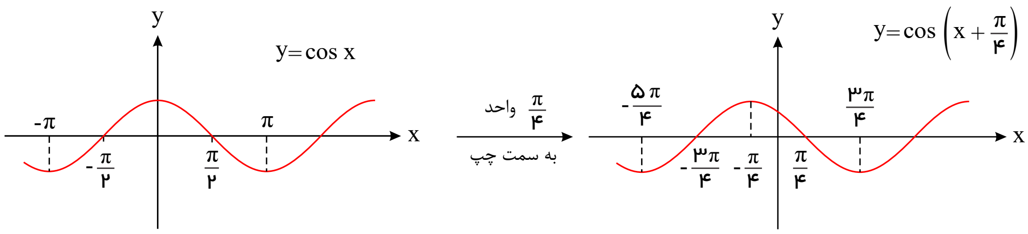
بازه‌ی مطلوب برای b، $\frac{1}{2}<b<1$ به دست آمد. بنابراین فاصله‌ی مطلوب برای x:

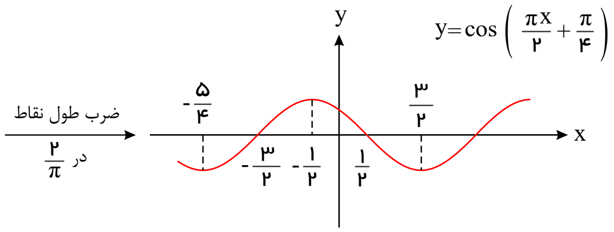
$$x_1: \frac{1}{2}<b<1 \Rightarrow \frac{1}{4}<b^2<1 \Rightarrow \frac{3}{2}<2b^2+1<3 \Rightarrow \frac{3}{2}<x_1<3$$

$$x_2: \frac{1}{2}<b<1 \Rightarrow \frac{3}{2}<3b<3 \Rightarrow \frac{3}{2}<x_2<3$$

۲۱ - گزینه ۱ نمودار تابع f را رسم می کنیم:

$$y=\cos x \xrightarrow[x\to x+\frac{\pi}{4}]{\frac{\pi}{4}\text{واحد به چپ}} y=\cos(x+\frac{\pi}{4}) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}x]{\text{طول نقاط ضرب در }\frac{2}{\pi}} y=\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$





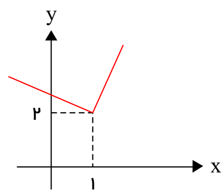
واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار k برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۲۲ - گزینه ۳

مقدار a ، باید عددی باشد که با تعیین علامت کردن قدر مطلق، دو خط با شیب‌های مختلف ایجاد شود تا تابع غیر یکنوا شود. دو گزینه را می‌نویسیم و بقیه گزینه‌ها را می‌توانید به راحتی بررسی کنید.

$$a=3 \Rightarrow y=2x+3|x-1| = \begin{cases} 5x-3 & x\ge 1 \\ -x+3 & x<1 \end{cases}$$

شیب‌ها مختلف العلامه هستند پس غیر یکنواست



$$a=1 \Rightarrow y=2x+|x-1| = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 3x-1 & x\ge 1 \end{cases}$$

شیب این دو خط هم علامت است و یکنوا است.

۲۳ - گزینه ۲ نکته: یک تابع بصورت زوج مرتب در صورتی صعودی است که با افزایش مؤلفهٔ اول، مؤلفهٔ دوم نیز افزایش یابد.

تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+2=4$$

$$(f+g)(-1)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$(f+g)(0)=[a]+1$$

اگر $f+g$ صعودی باشد، باید با افزایش مقادیر x مقادیر تابع هم زیاد شود. یعنی:

$$(f+g)(-1)\le(f+g)(0)\le(f+g)(1) \Rightarrow \frac{1}{2}\le[a]+1\le 4 \xrightarrow{-1} \frac{-1}{2}\le[a]\le 3$$

چون $[a]\in\mathbb{Z}$ است، پس $0\le[a]\le 3$، یعنی $0\le a<4$ می‌باشد.

۲۱ - گزینه ۲ ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow 2x-y=-2 \Rightarrow f(x)=y=2x+2$$

سابطهٔ تابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$y=(x-2x-2)(x+3)=(-x-2)(x+3)=-x^2-5x-6$$

تابع درجهٔ دوم در یک طرف رأس اکیداً یکنواست. این تابع نیز در هر یک از بازه‌های $[-\frac{5}{2}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{5}{2}]$ اکیداً یکنواست.

۲۵ - گزینه ۲

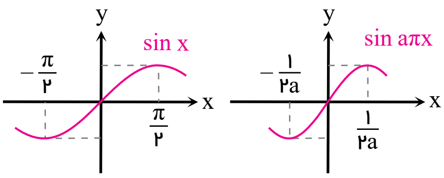
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 0 \\ 2 & x\ge 0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} -2 & x\le -2 \\ \frac{1}{2}x-1 & -2\le x\le 4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

پس:

$$f(x)-g(x)=\begin{cases} x+4 & x\le -2 \\ \frac{1}{2}x+3 & -2\le x\le 0 \\ -\frac{1}{2}x+3 & 0\le x\le 4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که تابع در بازه $[0\ ,\ 4]$ اکیداً نزولی است.

۲۶ - گزینه ۱ نمودار تابع $\sin x$ و $\sin a\pi x$ با فرض $a>0$ به صورت زیر است. دقت کنید که اعداد روی محور x ها به $a\pi$ تقسیم می‌شود.



اگر تابع $\sin a\pi x$ در بازهٔ $[-2\ ,\ 2]$ صعودی باشد، باید $\frac{1}{2a}\ge 2$ باشد، پس $0<a\le\frac{1}{4}$ است. برای $a<0$ نمودار تابع قرینه می‌شود در سمت راست مبدأ، تابع نزولی خواهد بود.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۵ - ۲	۹ - ۳	۱۳ - ۱	۱۷ - ۲	۲۱ - ۱	۲۵ - ۲
۲ - ۳	۶ - ۳	۱۰ - ۲	۱۴ - ۲	۱۸ - ۳	۲۲ - ۳	۲۶ - ۱
۳ - ۱	۷ - ۳	۱۱ - ۲	۱۵ - ۲	۱۹ - ۳	۲۳ - ۲	
۴ - ۳	۸ - ۳	۱۲ - ۴	۱۶ - ۲	۲۰ - ۱	۲۴ - ۲	