متوسط

۱ – به‌ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+۴ & , x\geq ۱ \\ ۲x-a & , x<۱ \end{cases}$ می‌تواند یک‌به‌یک باشد؟

① -۷ ② -۸ ③ -۶ ④ -۴

۲ – هرگاه f تابعی یک به یک باشد و $f(x+۲f(x))=f(۵x+۲)$، در این صورت نمودار تابع $y=fof(x)$ محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

سخت

۳ – کدام تابع یک به یک است؟

① $y=x-\left[\frac{x}{۳}\right]$ ② $y=x+\left[-\frac{x}{۳}\right]$ ③ $y=x-\left[-\frac{x}{۳}\right]$ ④ $y=x-\sqrt{x}$

۴ – چند تابع یک به یک از $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مانند f می‌توان تعریف کرد که $f(۱)=۱$ باشد؟

① ۱۲ ② ۲۴ ③ ۱۲۰ ④ ۶۰

۵- اگر توابع f و g یک به یک باشند، کدام تابع قطعاً یک به یک است؟

① $f+g$ ② $f-g$ ③ $f\cdot g$ ④ fog

متوسط

۶- اگر رابطه‌ی $f=\left\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^{۲}-a),(b,۲),(-۱,۴)\right\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

① $(-۱,۱)$ ② $(-۱,۳)$ ③ $(۲,۱)$ ④ $(۲,۳)$

۷- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=|۲x+a|$ در فاصله‌ی $[-۱,۲]$ یک به یک است؟

① $\mathbb{R}-(-۱,\frac{۱}{۲})$ ② $[-۴,۲]$ ③ $\mathbb{R}-(-۴,۲)$ ④ $[-۱,\frac{۱}{۲}]$

۸- کدام تابع یک به یک است؟

① $y=|x+۲|+۴x$ ② $y=|x+۲|+|۴x|$ ③ $y=|x+۲|+x$ ④ $y=|x+۲|+|x|$

۹- اگر $f=\{(۲,۱),(m^{۲}-m,۱),(-۱,۳),(\frac{m}{۲},m+۱)\}$ تابعی یک به یک و $g(x)=[\frac{۳x}{۲}+۱]$ باشد، حاصل $(f+g)(m)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۲ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ $\frac{۳}{۲}$

بی نام

۱۰ - اگر تابع f یک به یک باشد، کدام تابع لزوماً یک به یک است؟

① $y=f(x^{۲})$ ② $y=x+f(x)$ ③ $y=x^{۳}\cdot f(x)$ ④ $y=f(\frac{۱}{x-۲})$

۱۱ - اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^{۲}-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، نمودار تابع $g(x)=ax+b$ محور طول‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

① $(۳,۰)$ ② $(-\frac{۳}{۲},۰)$ ③ $(-۳,۰)$ ④ $(\frac{۳}{۲},۰)$

سخت

۱۲ - فرض کنید تابع $f(x)=x^{۲}+ax+۴$ باشد. اگر تابع $y=|f(x)|$ در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

① $[۲,۵]$ ② $(-\infty,۵]$ ③ $[۲,+\infty)$ ④ $\mathbb{R}-(۲,۵)$

متوسط

۱۳ - اگر $f=\{(۱,۲)\ ,\ (۲,۳)\ ,\ (۳,۵)\}$ و $g=\{(۲,m)\ ,\ (۳,۷)\ ,\ (۵,۲)\}$، آنگاه به ازای کدام مقدار m، توابع gof و $f+g$ هر دو یک به یک هستند؟

① ۹ ② ۷ ③ ۲ ④ ۱

بی‌نام

آسان

۱۴ - برای کدام مقدار m تابع $y=\frac{۲x+m+۴}{x+m}$ یک به یک نیست؟

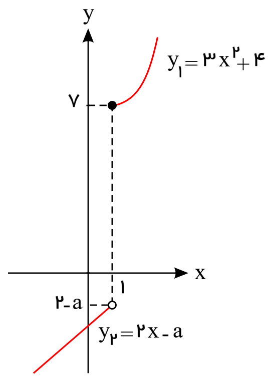
(۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) -۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ شکلی معرف تابع یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند و نه بیشتر.

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x^۲+۴ & ,\ x\geq ۱\\ ۲x-a & ,\ x<۱\end{cases}$$



برای یک‌به‌یک بودن تابع $f(x)$، داریم:
$$۲-a\leq ۷\Rightarrow a\geq -۵$$

با توجه به گزینه‌ها $a=-۴$ قابل قبول است.

۲ - گزینه ۳ می‌دانیم: $f(x)$ یک به یک است اگر: $x_۱=x_۲\Rightarrow f(x_۱)=f(x_۲)$

با توجه به این‌که تابع f یک به یک می‌باشد، داریم:

$$x+۲f(x)=۵x+۲\Rightarrow ۲f(x)=۵x+۲-x\Rightarrow ۲f(x)=۴x+۲$$

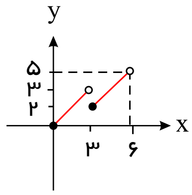
$$\Rightarrow ۲f(x)=۲(۲x+۱)\Rightarrow f(x)=۲x+۱$$

$$\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=۲f(x)+۱=۲(۲x+۱)+۱=۴x+۳$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تلاقی با محور y ها}} x=۰\Rightarrow fof(۰)=۴(۰)+۳=۳$$

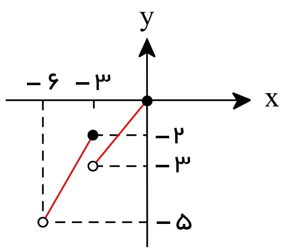
۳ - گزینه ۳

$$\text{گزینه‌ی (۱)}\rightarrow \begin{cases}۰\leq x<۳\rightarrow y=x\\ ۳\leq x<۶\rightarrow y=x-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{نمودار}}$$



$\Rightarrow$ یر یک به یک

$$\text{گزینه‌ی (۲)}\rightarrow \begin{cases}-۳<x\leq ۰\rightarrow y=x\\ -۶<x\leq -۳\rightarrow y=x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{نمودار}}$$



$\Rightarrow$ غیریک به یک

$$\text{گزینه‌ی (۴)}\rightarrow y=x-\sqrt{x}\rightarrow y=۰\rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)=۰\rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=۱\end{cases}$$

اگر $y=۰$ باشد، برای x دو جواب بدست می‌آید پس تابع غیر یک به یک است.

۴ - گزینه ۲

تابعی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌ی دوم یکسان نداشته باشند.

مؤلفه‌ی ۱ تنها به ۱ وصل می‌شود و مؤلفه‌ی ۲، چهار انتخاب دارد و مؤلفه‌ی ۳ تنها سه انتخاب دارد و مؤلفه‌ی ۴ تنها دو انتخاب بنابراین:

$$\text{تعداد توابع یک به یک شامل } (۱,۱) = ۴\times ۳\times ۲=۲۴$$

۵ - گزینه ۴ نکته: اگر f و g یک به یک باشند، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است یک به یک باشند و ممکن است یک به یک نباشند. مثلاً برای $f+g$ داریم:

$f=\{(۲,۴),(۳,۵)\}$ یک به یک است ، $g=\{(۲,۶),(۳,۵)\}$ یک به یک است.

$$\Rightarrow f+g=\{(۲,۱۰),(۳,۱۰)\}\Rightarrow \text{یک به یک نیست}$$

اگر f و g یک به یک باشند، تابع fog و gof قطعاً یک به یک هستند. در مورد fog داریم:

$$(fog)(x_1)=(fog)(x_2)\Rightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\xrightarrow{\text{f یک به یک است}} g(x_1)=g(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{g یک به یک است}} x_1=x_2\Rightarrow$$ fog یک به یک است.

۶ - گزینه ۴ الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3,2)=(3,a^2-a)\Rightarrow a^2-a=2\Rightarrow a^2-a-2=0$$

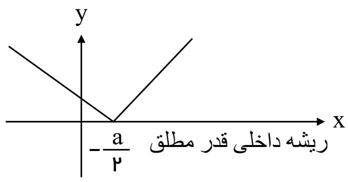
$$\Rightarrow(a-2)(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=-1\end{cases}$$

ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$$(3,2)=(b,2)\Rightarrow b=3$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a، باید یکی را به گونه ای انتخاب کنیم که شرایط (الف) و (ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a=2$ قابل قبول می‌باشد زیرا اگر $a=-1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1,4)$ و $(-1,5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a,b)=(2,3)$ می‌باشد.

۷ - گزینه ۳ می‌دانیم که در نمودار تابع $f(x)=|mx+n|$ نقطه‌ی شکستگی نمودار تابع، ریشه‌ی داخل قدر مطلق است، پس:



حال برای این که f تابعی یک به یک باشد، باید ریشه‌ی داخل قدر مطلق در فاصله‌ی $(-1,2)$ نباشد. پس ابتدا حدود a را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصله‌ی $(-1,2)$ باشد. سپس مجموعه‌ی جواب به دست آمده را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم:

$$2x+a=0\Rightarrow x=-\frac{a}{2}$$

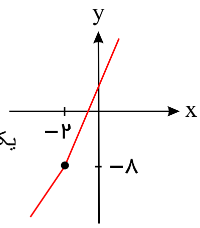
$$\Rightarrow -1<-\frac{a}{2}<2\xrightarrow{\times(-2)}-4<a<2$$

پس مجموعه‌ی جواب مورد نظر برابر است با:

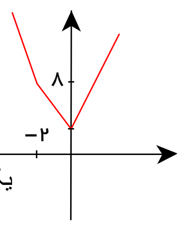
$$a\in\mathbb{R}-(-4,2)$$

۸ - گزینه ۱ خطوط موازی محور xها را رسم می‌کنیم اگر نمودار تابع را بیش از یک نقطه قطع کرده باشد آن تابع یک به یک نیست مثلا توابعی که ثابت باشند یا بخشی از آنها ثابت باشد هرگز تابع یک به یک نیستند.

گزینه (۱) $\rightarrow y=|x+2|+4x=\begin{cases}3x-2 & x<-2\\5x+2 & x\geq-2\end{cases}$ $\xrightarrow[\text{یک به یک است}]{\text{نمودار}}$



گزینه (۲) $y=|x+2|+|4x|=\begin{cases}-5x-2 & x<-2\\-3x+2 & -2\leq x<0\\5x+2 & 0\leq x\end{cases}$ $\xrightarrow[\text{یک به یک نیست}]{\text{نمودار}}$



گزینه (۳) $y=|x+2|+x=\begin{cases}-2 & x<-2\\2x+2 & x\geq-2\end{cases}\rightarrow$ قسمتی از تابع ثابت است و پس یک به یک نیست

گزینه (۴) $y=|x+2|+|x|\rightarrow$ نمودار تابع گلدانی است پس یک به یک نمی‌باشد.

۹ - گزینه ۱ f تابعی یک به یک است یعنی:

$$\begin{cases}(2,1)\in f\\(m^2-m,1)\in f\end{cases}\Rightarrow m^2-m=2$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow(m-2)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\\text{یا}\\m=-1\end{cases}$$

$m=2$ قابل قبول نیست، چون f یک به یک نمی‌شود:

$$f=\{(2,1),(-1,3),(1,3)\}$$

ولی اگر $m=-۱$ باشد، داریم:

$$f=\{(۲,۱),(-۱,۳),(-\frac{۱}{۲},۰)\}$$

ما حاصل $(f+g)(-۱)$ را می‌خواهیم:

$$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=۳+[-\frac{۳}{۲}+۱]=۳+[-\frac{۱}{۲}]=۳-۱=۲$$

۱۰ - گزینه ۴

۱) $f(x_۱^۲)=f(x_۲^۲)\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow x_۱=\pm x_۲\Rightarrow$ **یک به یک نیست**

۲) مثال نقض : $f(x)=-x\Rightarrow y=۰$ تابع ثابت $\Rightarrow$ یک به یک نیست

۳) مثال نقض : $f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow y=x^۳ f(x)=x^۲\Rightarrow$ یک به یک نیست

۴) $f(\frac{۱}{x_۱-۲})=f(\frac{۱}{x_۲-۲})\xrightarrow{\text{f یک به یک است}}\frac{۱}{x_۱-۲}=\frac{۱}{x_۲-۲}\Rightarrow x_۱-۲=x_۲-۲$

$\Rightarrow x_۱=x_۲\Rightarrow$ یک به یک است

۱۱ - گزینه ۲

$$f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

شرط تابع بودن: $(۳,۲),(۳,a^۲-a)\Rightarrow a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow(a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\a=-۱\end{cases}$

$a=-۱\Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}\Rightarrow$ **تابع نیست.**

$a=۲\Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}$ **شرط یک‌به‌یک بودن:** $(۳,۲),(b,۲)\Rightarrow b=۳$

$$g(x)=ax+b\xrightarrow[b=۳]{a=۲}g(x)=۲x+۳\Rightarrow g(x)=۰\Rightarrow ۲x+۳=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

محل برخورد تابع g با محور طول‌ها نقطهٔ $(-\frac{۳}{۲},۰)$ می‌باشد.

۱۲ - گزینه ۱ باید $f(x)=۰$ در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ فاقد ریشه باشد. بنابراین کافی است:

$$\begin{cases}f(-۱)\geq ۰\Rightarrow ۱-a+۴\geq ۰\Rightarrow a\leq ۵\\ x_S\leq -۱\Rightarrow -\frac{a}{۲}\leq -۱\Rightarrow a\geq ۲\end{cases}\Rightarrow ۲\leq a\leq ۵$$

۱۳ - گزینه ۴

ابتدا زوج مرتب $gof(x)$ و $f+g$ را می‌یابیم و می‌دانیم:

$$gof(x):\ \{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

یک تابع بصورت زوج مرتب در صورتی یک به یک است که مولفه‌ی دوم یکسان نداشته باشند و در صورت وجود مولفه‌ی دوم یکسان باید مولفه های اول آنها برابر باشند.

$$۱\to ۲\to m\Rightarrow(۱,m)$$
$$۲\to ۳\to ۷\Rightarrow(۲,۷)$$
$$۳\to ۵\to ۲\Rightarrow(۳,۲)$$

$$gof=\{(۱,m)\ ,\ (۲,۷)\ ,\ (۳,۲)\}\Rightarrow m\neq ۷,۲$$
$$f+g=\{(۲,m+۳),(۳,۱۲)\}\Rightarrow m+۳\neq ۱۲\Rightarrow m\neq ۹$$

تنها $m=۱$ در گزینه ها قابل قبول است.

۱۴ - گزینه ۲ نکته: تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ زمانی یک به یک نمی‌باشد که: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد.

$$\frac{۲}{۱}=\frac{m+۴}{m}\Rightarrow ۲m=m+۴\to m=۴$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۳ - ۳	۵ - ۴	۷ - ۳	۹ - ۱	۱۱ - ۲	۱۳ - ۴
۲ - ۳	۴ - ۲	۶ - ۴	۸ - ۱	۱۰ - ۴	۱۲ - ۱	۱۴ - ۲