

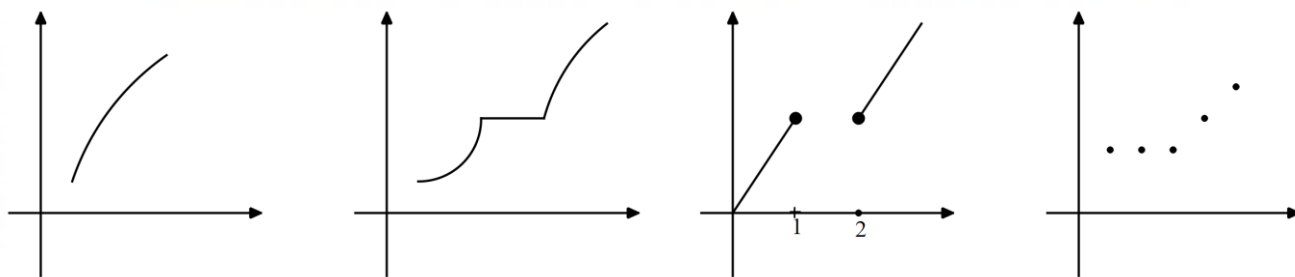
توابع:

یکنوا { الف) صعودی
ب) نزولی

یکنوا { ج) اکیداً صعودی
د) اکیداً نزولی

ه) توابع غیر یکنوا

الف) تابع صعودی:



اگر تابع $y = f(x)$ در $A \subseteq D_f$ از سمت چپ به راست روبه بالا حرکت کند یا ثابت بماند

(هیچگاه به سمت پایین نرود) تابع صعودی است.

تابع را در A صعودی می‌گوییم اگر به ازای هر $a, b \in A$

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

جهت تغییرات تابع و متغیر باید مثل هم باشد (با افزایش x ، y با افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند).

$$(a, b) \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

(ب) تابع نزولی:

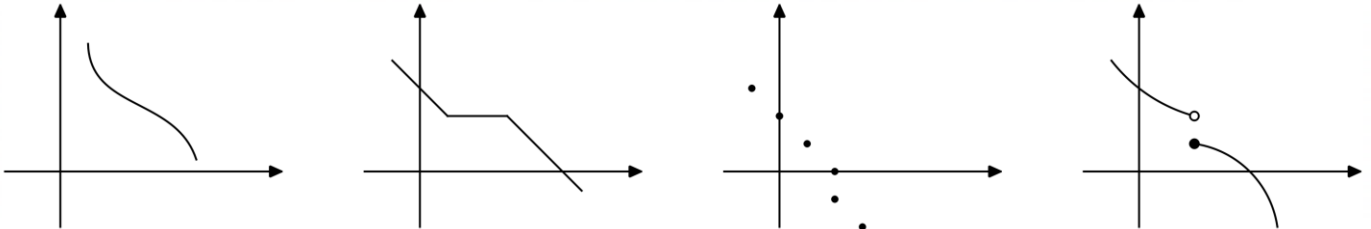
(۱) نمودار تابع از چپ به راست رو به پایین حرکت می‌کند تابع کاهشی است.

(۲) با افزایش x ، مقدار y یا کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

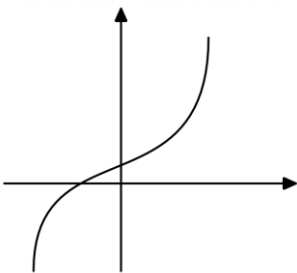
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

توابع نزولی:



ج) تابع اکیداً صعودی:

این نوع توابع از چپ به راست رو به بالا می روند و هیچوقت درجا نمی زنند.



$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (۱)$$

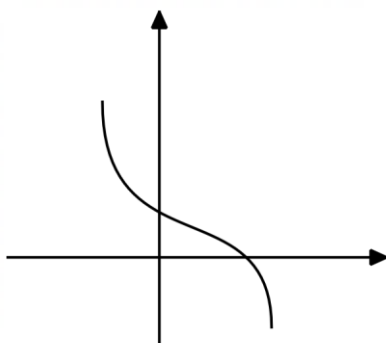
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0 \quad (۲)$$

همانطور که دیده می شود تابع اکیداً صعودی، تابع صعودی است ولی بر عکس آن صحیح نیست.

د) تابع اکیداً نزولی:

۱) از چپ به راست فقط رو به پایین حرکت می کند.

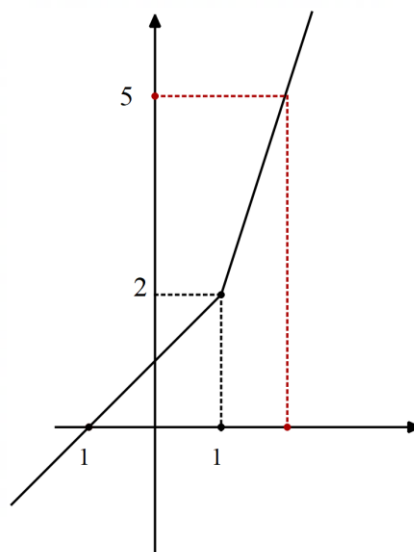
$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید و به کمک نمودار صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.

1) $f(x) = 2x + |x - 1|$

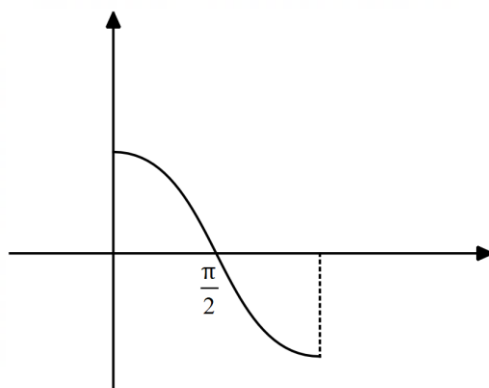
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l|l|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$



نمودار تابع از چپ به راست به سمت بالا حرکت می کند و اکیداً صعودی است.

توضیح: این تابع صعودی نیز هست.

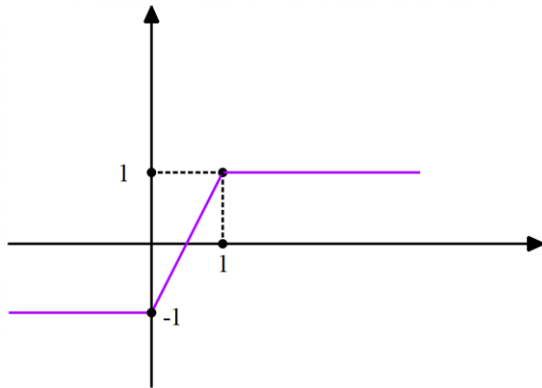
2) $f(x) = \cos x \quad [0, \pi]$



اکیداً نزولی

$$3) f(x) = |x| - |x - 1|$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \text{نقاط گوشه (زاویه دار)}$$



تابع صعودی

توضیح:

تابع صعودی (نزولی) را یکنوا توابع اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) را اکیداً یکنوا گوئیم.

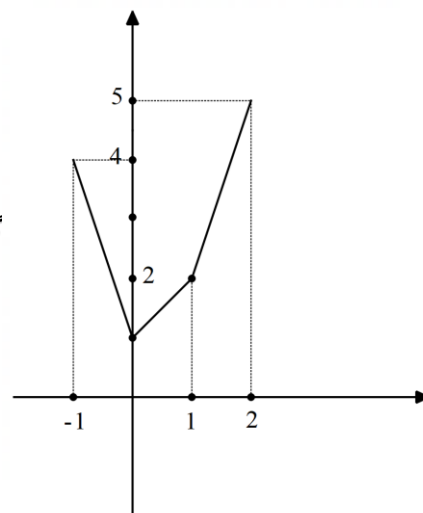
تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

تابع گاهی صعودی و گاهی نزولی غیر یکنوا است.

$$4) f(x) = |x - 1| + |2x|$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \text{ نقاط کمکی}$$

گوشه



تابع غیر یکنوا

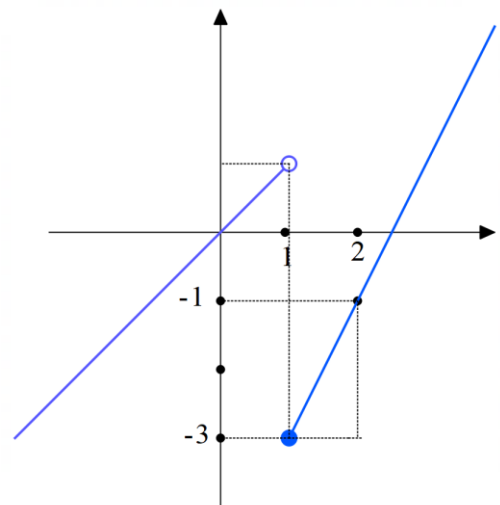
در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی

در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی

در \mathbb{R} غیر یکنوا

$$5) f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} | 1 & | 2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

غیر یکنوا





در توابع چند ضابطه ای ممکن است هر ضابطه جداگانه اکیداً صعودی (نزولی) باشد ولی در حالت کلی غیر یکنوا باشد.

تمرین: نمودارهای زیر را رسم کنید و به کمک نمودار صعودی یا نزولی بودن آن را بررسی کنید.

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$$2) f(x) = 2x + [x] \quad [0, 3)$$

$$3) f(x) = \log \frac{1}{2}^x$$

$$4) f(x) = \log_2^x$$

$$5) f(x) = x^2 - 4x$$

$$6) f(x) = x |x|$$

$$7) f(x) = \operatorname{tg} x \quad (0, \pi)$$

$$8) f(x) = \sqrt{x}$$

$$9) f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

تمرین: تابع $f(x) = |x - 2| + |x - 4|$ را رسم کنید و بزرگترین بازه که تابع در آن بازه نزولی است را مشخص کنید.

مثال:

با استفاده از گزاره شرطی صعودی یا نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{در بازه } (0, +\infty)$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1} \quad \textcircled{1}$$

$$x_2 > x_1 \rightarrow x_2^2 > x_1^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{x_1^2} \Rightarrow -\frac{1}{x_2^2} > -\frac{1}{x_1^2} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \sqrt{x_2} - \frac{1}{x_2^2} > \sqrt{x_1} - \frac{1}{x_1^2}$$

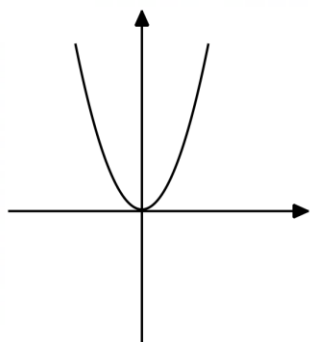
تابع اکیداً صعودی است

از حل طولانی نترسید اگر تست بود گفتیم با افزایش

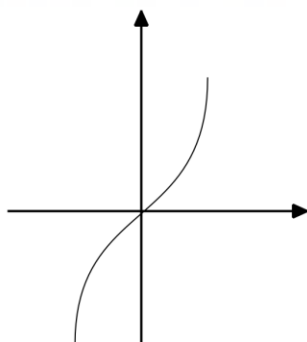
$\sqrt{x} \leftarrow x$ افزایش و $\frac{1}{x^2}$ کاهش و $-\frac{1}{x^2}$ افزایش پیدا می کند.

کمتر از ۵ ثانیه وقت می برد.

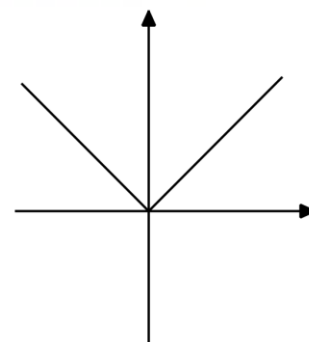
$$y = x^2$$



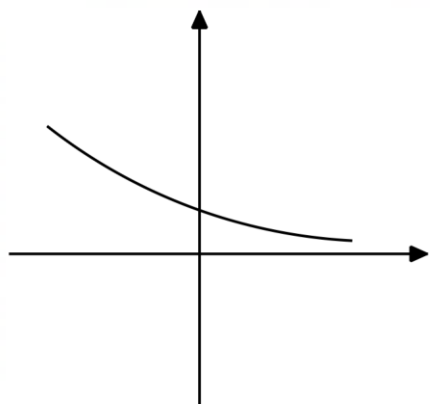
$$y = x^3$$



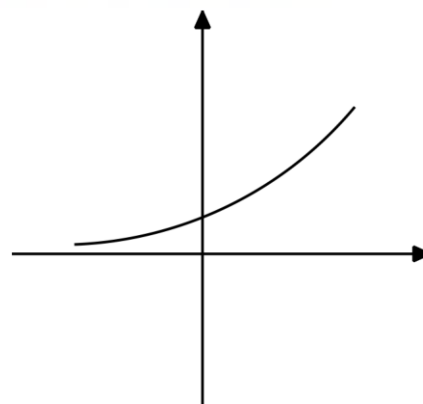
$$y = |x|$$



$$y = a^x \quad 0 < a < 1$$

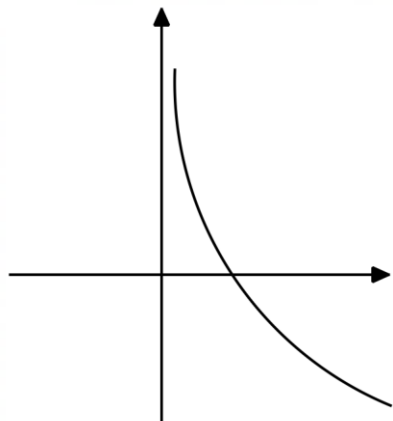


$$y = a^x \quad a > 1$$



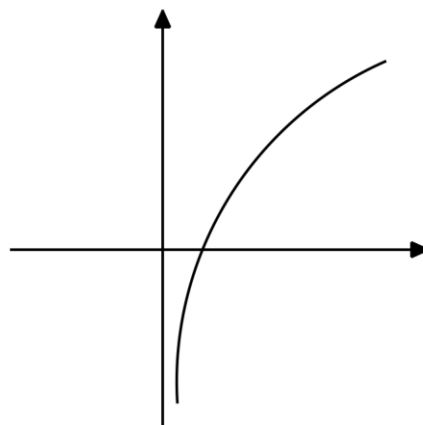
$$y = \log_a x$$

$$0 < a < 1$$

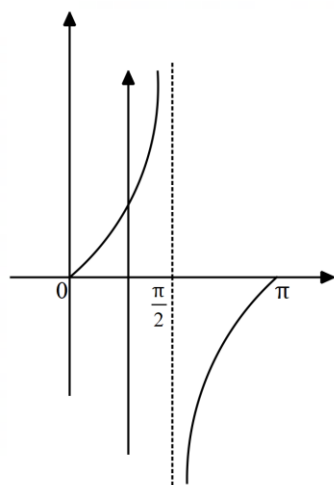


$$y = \log_a x$$

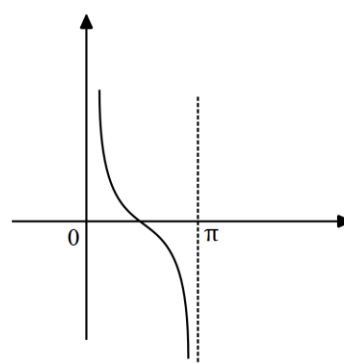
$$a > 1$$



$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

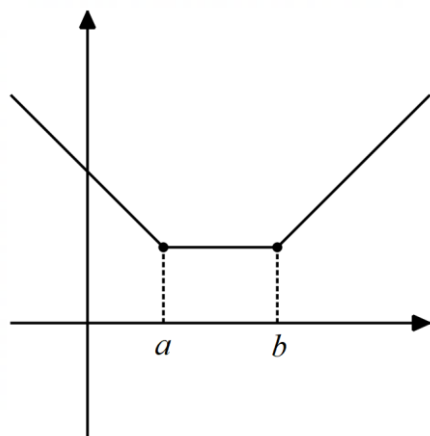


$$f(x) = \operatorname{cot} x$$

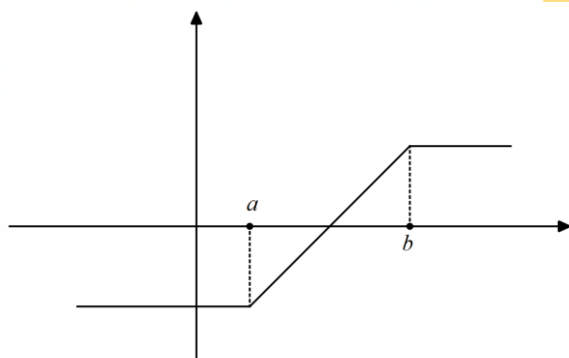


$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$$b > a$$



$$y = |x - a| - |x - b|$$



با توجه به نمودارهای توابع بالا صعودی یا نزولی بودن آن ها را بررسی کنید (در بازه های مختلف)

نکته: اگر f در بازه (a, b) اکیداً صعودی باشد و

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

تست:

تابع $f(x) = x^2 - 2(k+1)x + 1$ با دامنه $[3, 5]$ غیر یکنوا است حدود k کدام است؟

$$K < 4 \quad (4)$$

$$2 < K < 4 \quad (3)$$

$$K > 4 \quad (2)$$

$$K < 2 \quad (1)$$

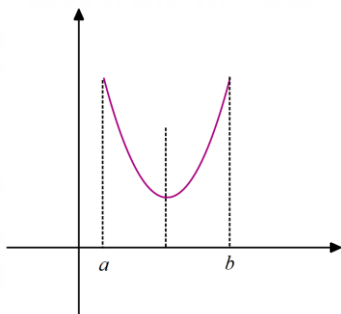
$$-\frac{2b}{2a} = \frac{2(k+1)}{2} = k+1$$

$$3 \leq k+1 \leq 5$$

$$2 < k < 4$$

نکته: اگر محور تقارن بین a و b قرار گیرد تابع در بازه (a, b) غیر یکنوا است و اگر بین آن ها نباشد

یکنوا است.





تست:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 1 \\ 4x - k & x < 1 \end{cases}$$

$f(x)$ صعودی است حدود k کدام است؟

$k \geq 1$ (۴)

$k \geq 2$ (۳)

$k \leq 1$ (۲)

$k \leq 2$ (۱)

در ضابطه اول تابع، نقطه ابتدا $f(1) = 2$

در ضابطه دوم $f(1) = 4 - k$ نقطه انتها

$$4 - k \leq 2 \rightarrow k \geq 2$$

پایگاه آموزشی
فوقمدرسی