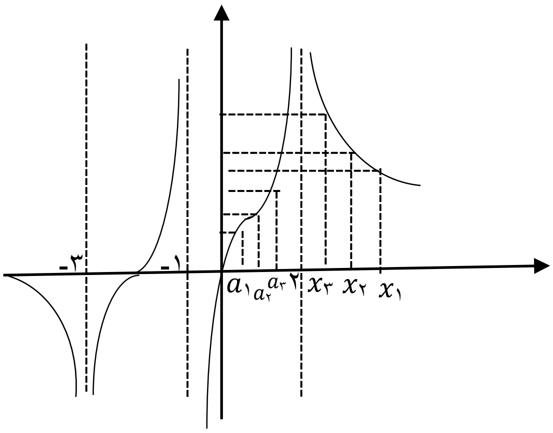
بخش ششم

حد بی نهایت

به نمودارهای زیر دقت کنید

$y = f(x)$

الف



$x \to ۲^+$: از سمت راست ۲ روی محور x

به ۲ نزدیک می شویم تا فاصله آنها به سمت صفر میل کند.

هرچه به ۲ نزدیک ترشویم مقدار y بیشتر می شود

و y از هر عدد دلخواهی بیشتر می شود

یعنی $\boxed{\lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty}$ ۱

$x \to ۲^-$ اگر از سمت چپ به ۲ نزدیک شویم

مقدار y هرچه بخواهیم بزرگ می شود

$\boxed{\lim_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty}$ ۲

یا می توانیم بگوییم $\lim_{x \to ۲} f(x) = +\infty$

نکته : همیشه حرکت x به مرکزو بررسی حرکت روی محور y

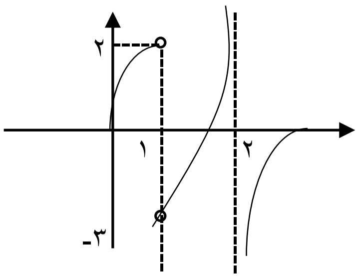
به صورت مشابه:

$$\lim_{x \to -۱^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = +\infty$$

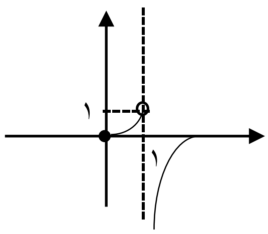
$$\lim_{x \to -۳^+} f(x) = \lim_{x \to -۳^-} f(x) = \lim_{x \to -۳} f(x) = -\infty$$

مثال : با توجه به نمودارهای زیر حد تابع را در نقاط مشخص شده بدست آورید.



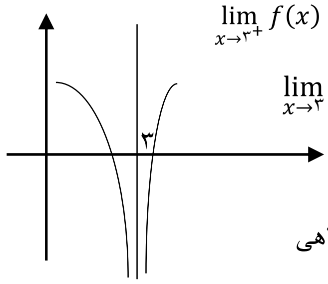
$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = -\infty$

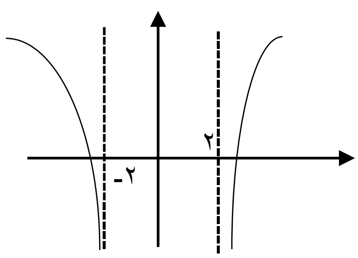
$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$



$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to ۳} f(x) = -\infty$

تابع در x=۳ حد نامتناهی دارد



$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to ۲^-} f(x)$ ت ن

$\lim_{x \to -۲^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -۲^+} f(x)$ ت ن

عملیات روی بی نهایت :

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$l + \infty = +\infty$

$l - \infty = -\infty$

$l > ۰ \quad l \times (+\infty) = +\infty \qquad l \times (-\infty) = -\infty$

$l < ۰ \quad l \times (+\infty) = -\infty \qquad l \times (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

$\infty^n = \infty , n > ۰$

مثال : $\infty^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\infty} = \infty$

$\frac{l}{\pm\infty} = ۰$

$a > ۱$	$a^{+\infty} = +\infty$

$۰ < a < ۱$	$a^{+\infty} = ۰$

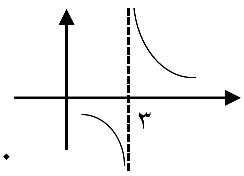
$\begin{cases} \infty - \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ ۰ \times \infty \end{cases}$ مبهم

درتوابع به صورت $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \overset{+}{\underset{-}{\text{یا}}}\ \infty$

برای تشخیص علامت ابتدا عدد گذاری و علامت صورت مشخص می شود علامت مخرج را با توجه به مفهوم حد بادقت مشخص می کنیم واز ضرب علامت ها ، علامت ∞ مشخص می شود.

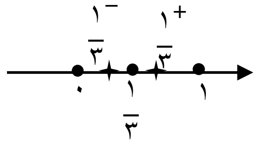
مثال : $\lim_{x\to ۳}\frac{-۳}{۳-x}$ را مشخص و نمودار آن را درهمسایگی ۳ رسم کنید.

$\lim_{x\to ۳^+}\frac{-۳}{۳-x} = \frac{-۳}{۰^-} = +\infty$ $\quad \boxed{x \to ۳^+ \Rightarrow x > ۳ \to ۳ - x < ۰}$



$\lim_{x\to ۳^-}\frac{-۳}{۳-x} = \lim \frac{-۳}{۰^+} = \infty \qquad x \to ۳^- \qquad x < ۳ \to ۳ - x > ۰$

مثال : $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}} \frac{[x]-۱}{|۳x-۱|}$ را بدست آورید ونمودار آن را در همسایگی $\frac{۱}{۳}$ رسم کنید.



$$\left[\frac{۱}{۳}^+\right] = ۰$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^+} \frac{[x]-۱}{|۳x-۱|} = \lim_{x\to\frac{۱}{۳}^+} \frac{-۱}{|۳x-۱|} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

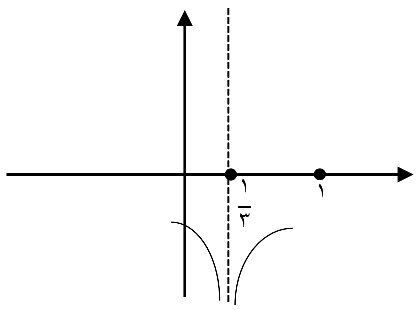
نکته اگر داخل جزء صحیح عدد صحیح نباشد حد چپ و حد راست با هم برابر است.

$$\left[\frac{۱}{۳}^+\right] = \left[\frac{۱}{۳}^-\right] = ۰$$

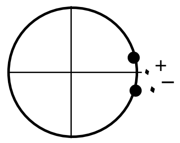
$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-} |۳x-۱| = |۰^-| = ۰^+$$

$$\left[\frac{۱}{۳}^-\right] = ۰$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-} \frac{[x]-۱}{|۳x-۱|} = \lim \frac{-۱}{|۳x-۱|} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$



مثال : $\lim\limits_{x\to۰} \frac{۳x+cosx}{sinx}$ را بدست آورید.



۰^- در ناحیه چهارم

$sinx < ۰$

۰^+ در ناحیه اول

$sinx > ۰$

$$\lim_{x\to۰^+} \frac{۳x+cosx}{sinx} = \lim_{x\to۰^+} \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

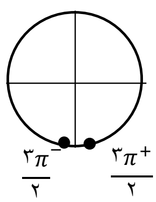
$$\lim_{x\to۰^-} \frac{۳x+cosx}{sinx} = \lim_{x\to۰^-} \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

مثال : $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} tg۲x$ را بدست آورید

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} tg۲x = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} \frac{sin۲x}{cos۲x}$$

$$\frac{۳\pi}{٤}^+ \times ۲ = \frac{۳\pi}{۲}^+$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} \frac{sin۲x}{cos۲x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} \frac{sin۲(\frac{۳\pi}{۴})}{cos۲(x)} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$



$\frac{۳\pi}{۲}^+$ در ربع چهارم و $cos\,۲x$ مثبت

نکته مهم : درصورتی که $\lim_{x\to k} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x\to k} f(x) = -\infty$ باشد K ریشه مضاعف مخرج است.

درتابع درجه ۲ $g(x) = ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر K ریشه مضاعف باشد

الف : $g(k) = ۰$

ب: $\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۰$

ج: ریشه مضاعف $k = -\frac{b}{۲a}$

اگر در تابع $h(x)$ ، k ریشه مضاعف باشد.

$$h(k) = ۰ \qquad , \qquad h'(k) = ۰$$

این روش بیشتر وقتی بکار می رود که $h(x)$ درجه ۲ نباشد .

تست : اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{۴x^{۲}+۲ax+b} = -\infty$ باشد a+b کدام است.

۱) ۰ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۲

حل x=۱ ریشه مضاعف مخرج

$$h(x) = ۴x^{۲} + ۲ax + b$$

$$h(۱) = ۰ \to ۴ + ۲a + b = ۰$$

$$x = \frac{-۲a}{۸} = \frac{-a}{۴} = ۱ \to \begin{matrix} a = -۴ \\ b = ۴ \end{matrix} \qquad a + b = ۰$$

گزینه ۱

اگر $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x^{۳}+۱}{۴x^{۳}+ax+b} = +\infty$ باشد آنگاه $a \times b$ کدام است

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۳
٤) ۳-

$$h(x) = ۴x^{۳} + ax + b$$

$$h\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + a\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲} + b = ۰$$

$$۱ + a + ۲b = ۰$$

$$h'(x) = ۱۲x^{۲} + a$$

$$h'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \quad ۱۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + a = ۰ \quad \Rightarrow a = -۳$$

$$۱ + a + ۲b = ۰ \xrightarrow{a=-۳} ۱ - ۳ + ۲b = ۰ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

گزینه ٤

$$a \times b = -۳ \times ۱ = -۳$$

مثال : درمورد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟ سراسری ۹۸ تجربی

۱) $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$

۴) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=-\infty$

اگر $x\to ۰^-$ درنتیجه $x<۰$ و $|x|=-x$ مخرج کسر صفر می شود وتابع تعریف نشده است یعنی گزینه ۱ و ۲ رد می شود.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

گزینه ۴

مثال : اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد a+b کدام است ؟ سراسری ۹۸

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

$$h(x)=x^۲+ax+b \qquad -\frac{a}{۲}=۲\to \boxed{a=-۴}$$

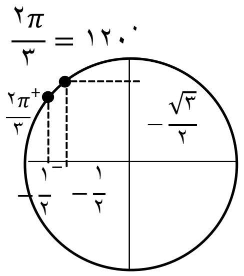
$$h(۲)=۴+۲a+b=۰ \qquad ۴-۸+b=۰\Rightarrow \boxed{b=۴}$$

$\boxed{a+b=۰}$ گزینه۲

مثال : درمورد تابع $f(x)=\frac{sinx}{۱+۲cosx}$ کدام بیان درست است ؟ سراسری ۹۸ خارج تجربی

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^{+}} f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^{+}} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^{-}} f(x)=-\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}} f(x)=+\infty$



اگر در زاویه مکمل باشند $\frac{\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}=\pi \Rightarrow sin\frac{\pi}{۳}=sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ سینوس آنها برابر است

$$x\to\frac{۲\pi}{۳}^{+} \Rightarrow cosx\to-\frac{۱}{۲}^{-} \Rightarrow cosx<-\frac{۱}{۲}\to ۲cosx<-۱ \quad\Rightarrow\quad ۲cosx+۱<۰$$

$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^{+}}\frac{sinx}{۱+۲cosx}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^{-}}=-\infty$$

خلاصه ای از حد بی نهایت

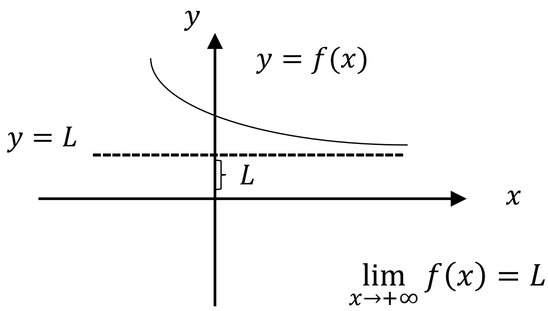
اگر X به اندازه کافی به a نزدیک شود f(x) هر اندازه بخواهیم بزرگ شود $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$ یا اگر X از مقدار کمتر از a به a نزدیک شود و f(x) از هر عدد دلخواه کوچکتر شود آنگاه $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$ و بقیه حالتها را نیز می توانیم تعریف کنیم.

در توابع کسری معمولاً اگر صورت کسر به عدد مثبت یامنفی نزدیک شود ومخرج به سمت صفر نزدیک شود دراین صورت f(x) به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند.

حد در بینهایت

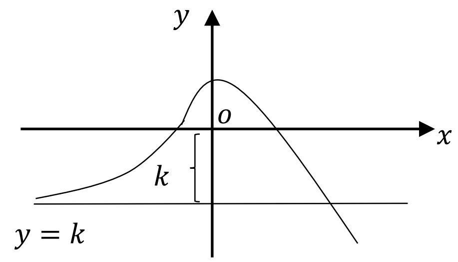
اگر x از هر عدد دلخواهی بزرگتر باشد دراین صورت $x\to+\infty$ اگر x ازهرعدد دلخواهی کوچکتر باشد دراین صورت $x\to-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ یعنی اگر x از هر عدد دلخواهی بزرگتر باشد .(به اندازه کافی بزرگ باشد) درنتیجه f(x) هر اندازه بخواهیم به L نزدیک می شود.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ یعنی x از هر عدد دلخواهی کوچکتر و f(x) به k نزدیک می شود مانند نمودار زیر

دقت کنید در این حالت k عددی منفی است



روشهای محاسبه حد در بی نهایت درچند جمله ای ها از توان کوچکتر واعداد صرفنظر می کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} ۲x - x^۲ = \lim_{x\to+\infty} -x^۲ = -(\infty)^۲ = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^۳ + ۸x + ۱ = (-\infty)^۳ = -\infty$$

در توابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند می توانیم در صورت و مخرج از توانهای کوچکتر و اعداد صرفنظرکنیم .

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x-x^۲}{۳+x+۲x^۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^۲}{۲x^۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^۳ + x}{۲x + ۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^۳}{۲x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲}x^۲ = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۳x + ۱}{x^۲ + ۴x + ۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x}{x^۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳}{x} = ۰$$

با توجه به مثال بالا اگر $x \to \pm\infty$ در توابع گویا اگر درجه مخرج و صورت برابر باشند جواب حدنسبت ضرایب در جمله با توان بزرگتر است.

اگر درجه مخرج بیشتر باشد حد کسر صفر است

اگر درجه صورت بیشتر باشد حد کسر $+\infty$ یا $-\infty$ می شود .

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2a-1)x^3+3x^2-1}{(4a+1)x^2+x+1}=b$ باشد مقدار $a+b$ کدام است ؟

۱(۱ $\frac{3}{2}$ (۲   ۲ (۳ $\frac{5}{2}$(۴

اگر درجه صورت بیشتر از مخرج باشد حد کسر ∞ می شود و نمی تواند عدد معین b باشد بنابراین

$$2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2\cancel{-1}}{3x^2\cancel{+x}\cancel{+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3x^2}=1=b \qquad a+b=\frac{3}{2}$$

مثال : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$ آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱(۱   ۲ (۲   ۳ (۳   ۴ (۴

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+2}-\frac{ax+b}{1}\right)=\lim_{x\to}\frac{x^2+3x+1-(x+2)(ax+b)}{x+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}_{+}3x+1-(ax^2+bx+2ax+2b)}{x+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-a)+x(3-b-2a)+1-2b}{x+2}=0$$

چون حد کسر صفر است درجه صورت باید کمتر از مخرج باشد

$$1-a=0\Rightarrow a=1$$

$$3-b-2a=0\to 3-b-2=0\Rightarrow b=1$$

$a+b=2$ گزینه۲

چند هم ارزی

$$x\to\pm\infty \qquad ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots=ax^n$$

از توانهای کوچکتر و اعداد و توابع کراندار مانند sin و cos صرفنظر می کنیم.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\simeq\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$
$$x\to\pm\infty$$

نکته: از این هم ارزی ها وقتی استفاده می کنیم که هم ارزی قبلی جواب را به صفر تبدیل کند

$$\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}\simeq\sqrt[3]{a}\,(x+\frac{b}{3a})$$
$$x\to\pm\infty$$

$$[x]\simeq x$$
$$x\to\pm\infty$$

مثال $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳+(x-۱)^۳+(x-۲)^۳+\cdots+(x-۱۰)^۳}{(۲x-۱)(۱۱x^۲-x)}$ کدام است ؟

۱(۱ $\frac{۱}{۲}$ (۲ $\frac{۲}{۳}$(۳   ۰(۴

الف) درجه صورت و مخرج مساوی است

ب) درهر پرانتز از عدد و توان کوچکتر صرفنظر می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{x^۳+x^۳+\cdots+x^۳}^{۱۱}}{(۲x)(۱۱x^۲)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱۱x^۳}{۲۲x^۳}=\frac{۱}{۲}$$

مثال : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^۳\left[\frac{۱}{x}\right]+۲x}{\sqrt{x^۶+۲x+۵}}$ کدام است ؟

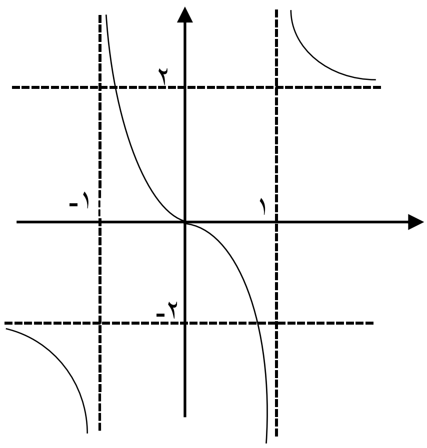
۱(۱   ۰ (۲   ۲ (۳ $-\infty$ (۴

چون $x\to-\infty$ در نتیجه $\frac{۱}{x}\to ۰^-$ و جزء صحیح $[۰^-]$ برابر ۱- است.

ازتوان های کوچکتر و اعداد صرفنظر می کنیم

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۳+۲x}{\sqrt{x^۶+۲x+۵}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۳}{|x^۳|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۳}{-x^۳}=۱$$

نمودار تابع f شکل مقابل است $\lim\limits_{x\to۱^-}(fof)(x)$ کدام است ؟



$+\infty$(۱ $-\infty$ (۲   ۲(۳   -۲ (۴

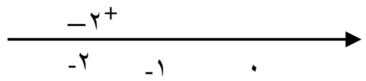
$\lim\limits_{x\to۱^-}ff(x)=f(-\infty)=-۲$ $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-\infty$

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$ آنگاه حد راست این عبارت در نقطه x=-۲ کدام است ؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow x^۲-۴>۰ \quad |x^۲-۴|=x^۲-۴$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$$



$$x\to -۲^+ \Rightarrow -۲<x<-۱$$

$$\Rightarrow ۱<x^۲<٤ \Rightarrow x^۲-٤<۰$$

$$\Rightarrow |x^۲-٤|=-x^۲+٤$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}=\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=$$

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{-x^۲+۴}{-x^۲-x+۲}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to -۲^+}\frac{-۲x}{-۲x-۱}=\frac{۴}{۳}$$

گزینه ۴

مثال $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x}}}-\sqrt{\frac{۱}{x}-\sqrt{\frac{۱}{x}}}$ کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ∞

برای ساده تر کردن مسئله از تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\frac{۱}{x}=t \qquad \to \frac{۱}{۰^+}=+\infty \Rightarrow t\to +\infty$$

$$x\to ۰^+$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}}}{۱}\times\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t+\sqrt{t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+\sqrt{t}-t+\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t+\sqrt{t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{۲\sqrt{t}}{۲\sqrt{t}}=۱$$

مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳^x+۴^{x+۱}}{۳^{x+۵}+۴^{x-۱}+۱}$ کدام است ؟

۱(۱ $\frac{۱}{۲۴۳}$(۲ ۱۶ (۳ ۰(۴

نکته اگر $x \to +\infty$ در توابع نمایی از پایه های کوچکتر و عدد در مقابل ∞ صرفنظر می کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۴^{x+۱}}{۴^{x-۱}} = ۴^{x+۱-x+۱} = ۴^۲ = ۱۶$$

مثال $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۳^{x-۱}+۲^{۲x}}{۵^x+۴^x+۳^x}$ کدام است ؟

نکته اگر $x \to -\infty$ در توابع نمایی از پایه های بزرگتر صرفنظرمی کنیم

نکته اگر $a > ۱ \Rightarrow a^{-\infty} = ۰$ و $۰ < a < ۱ \Rightarrow a^{-\infty} = \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳^{x-۱}+۲^{۲x}}{۵^x+۴^x+۳^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳^{x-۱}+۴^x}{۵^x+۴^x+۳^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳^{x-۱}}{۳^x} = \lim ۳^{x-۱-x} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} ax+b+\sqrt{x^۲-۴x} = ۴$ باشد $a+b$ کدام است ؟

۲(۱ ۳ (۲ ۰ (۳ ۱(۴

یاد آوری

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \simeq \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

$$\sqrt{x^۲-۴x} \simeq \sqrt{۱}\left|x+\frac{-۴}{۲}\right| = |x-۲|$$

$x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} ax+b+\overset{-x+۲}{\cancel{|x-۲|}} = \lim_{x\to-\infty} x(a-۱)+b+۲ = ۴ \quad \Rightarrow a = ۱ \quad b = ۲ \quad a+b = ۳$$

مثال $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱- ‏ ‏ ‏ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ‏ ‏ ‏ ۴) ۰

گزینه ۳ $$\lim_{x\to-\infty} ۲x+\sqrt{۴x^۲+x}=\lim_{x\to-\infty} ۲x+\sqrt{۴}\left|x+\frac{۱}{۴\times ۲}\right|=\lim_{x\to-\infty} ۲x-۲x-\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$