

مجموع جملات دنباله حسابی

در مباحث قبلی دنباله دیدیم که جمله n ام در یک دنباله حسابی از رابطه‌ی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
 به دست می‌آید.

الآن می‌خواهیم برای مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله حسابی یعنی $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ یک

رابطه بیان کنیم.

اول یک مثال ببینیم:

مجموع جملات دنباله‌ی $1, 2, 3, \dots, n-1$ را حساب کنید.

حل: مجموع جملات را با S (sum) نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) & \Rightarrow & 2s = \underbrace{\frac{(1 + n - 1)}{n} + \frac{(2 + n - 2)}{n} + \dots + \frac{(n - 1 + 1)}{n}}_{n-1} \\ s &= (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$2s = n(n - 1) \rightarrow s = \frac{n(n - 1)}{2}$$

نکته: اگر a_1, a_2, \dots, a_n ، n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشند و $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

تعریف شود آنگاه:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

البته می‌توان در این فرمول $a_n = a_1 + (n - 1)d$ را نیز جاگذاری کرد و خواهیم داشت:

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

مثال: در هر یک از دنباله‌های حسابی زیر، مجموع بیست جمله‌ی اول را محاسبه کنید. (نهایی)

الف) $-5, -3, -1, \dots$ $d = -3 - (-5) = 2$ $a_1 = -5$

$$s_{20} = \frac{20}{2} (2(-5) + (20 - 1)2) = 280$$

ب) $-5, 0, 5, \dots$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم برابر 3 و جمله‌ی دهم برابر 9 است. مجموع 25

جمله‌ی اول را بنویسید.

$$\begin{cases} a_7 = 3 \\ a_{10} = 9 \end{cases} \rightarrow d = \frac{9 - 3}{10 - 7} = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d \rightarrow 3 = a_1 + 6d \rightarrow a_1 = 3 - 12 = -9$$

$$s_{20} = \frac{20}{2} [2(-9) + (20 - 1) \times 2] = 200$$

تست: مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی روبرو کدام است؟

$-7, -1, 5, \dots$

1010 (4)

1000 (3)

99 (2)

980 (1)

$$d = a_2 - a_1 = -1 - (-7) = 6$$

$$a_1 = -7$$

$$s_{20} = \frac{20}{2} [2(-7) + 19(6)] = 10 \times \underbrace{[-14 + 114]}_{100} = 1000$$

مثال: مجموع تمام جملات دنباله حسابی روبرو را به دست آورید.

$$1, 5, 9, \dots, 85$$

اول قدر نسبت را حساب میکنیم بعد میریم سراغ تعداد جملات این دنباله.

$$d = 5 - 1 = 4$$

چون جمله‌ی اول و آخر را داریم تعداد جملات از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{85 - 1}{4} + 1 = \frac{84}{4} + 1 = 22$$

حال چون جمله‌ی اول و آخر را داریم از رابطه‌ی $s_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$ استفاده می‌کنیم.

$$s_{22} = \frac{22}{2} [1 + 85] = 11 \times 86 = 946$$

تست (تمرین): در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جمله‌ی چهارم و یازدهم 12 است. مجموع

چهارده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

96 (4)

192 (3)

84 (2)

168 (1)

تست: (سؤال محبوب طراحان کنکور)

مثال: مضارب طبیعی 5 را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، با شماره

آن دسته برابر باشد، مجموع جملات دسته بیستم کدام است؟

19000 (1) 195000 (2) 20000 (3) 20050 (4)

{5}, {10, 15}, {20, 25, 30}, ...

در هر دسته به تعداد شماره آن دسته عدد داریم، پس تا آخر دسته‌ی نوزدهم به تعداد

$1 + 2 + 3 + \dots + 19$ عدد داریم.

مجموع اعداد طبیعی 1 تا 19 را حساب می‌کنیم.

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{19}{2}(1 + 19) = 190$$

پس اولین عدد دسته بیستم 191 امین مضرب 5 است:

$$191 \times 5 = 955 \quad (\text{اولین عدد دسته 20})$$

دسته 20 دارای 20 عدد است که عدد اول آن 955، چون این اعداد مضرب 5 هستند یک

دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت 5 داریم بنابراین:

$$s_n = \frac{20}{2}(2(955) + 19(5)) = 10(1910 + 95) = 20050$$

تست: (سراسری ریاضی 99) (سراسری ریاضی خارج 94)

اعداد طبیعی را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته

باشد، ... $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, ... مجموع اعداد واقع در دسته ی بیستم، کدام است؟

3980 (4) 4010 (3) 4020 (2) 4120 (1)

تمرین: مجموع جملات دنباله ی $52, \dots, 4, 1, -2$ را به دست آورید؟

تمرین: مجموع هشت جمله ی اول دنباله ی $8, 3, -2$ را به دست آورید؟

تست: در یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود،

آنگاه به مجموع 20 جمله ی اول چقدر افزوده می شود؟ (ریاضی 83)

160 (1) 170 (2) 180 (3) 190 (4)

تمرین: مقدار x را در معادله ی $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ را به دست آورید.

تست: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول

دنباله صفر است؟ (تجربی 88)

18 (1) 19 (2) 20(3) 21 (4)

تست: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته مجذور کامل

باشد. مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟ ... (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (1)

(ریاضی خارج 84)

1691 (1) 1710 (2) 1729 (3) 1748 (4)

تست: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره

آن دسته باشد. مانند ... (1, 3, 5), (7, 9, 11), (1) جمله‌ی آخر دسته‌ی بیستم کدام است؟

415 (1) 419 (2) 421 (3) 423 (4)

(جملات شماره فرد، جملات شماره زوج)

- جمله‌های شماره فرد دنباله یعنی جمله‌های اول، سوم، پنجم و ... که با هم تشکیل یک

دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می‌دهند:

$$a_1, \overset{\text{+2d}}{\underbrace{a_1 + 2d}}, \overset{\text{+2d}}{\underbrace{a_1 + 4d}}, \dots$$

- جمله‌های شماره زوج یعنی جمله‌های دوم، چهارم و ششم و ... که با هم تشکیل دنباله‌ی

حسابی با جمله‌ی اول $a_1 + d$ و قدرنسبت $2d$ می‌دهند:

$$a_1 + d, \overset{\text{+2d}}{\underbrace{a_1 + 3d}}, \overset{\text{+2d}}{\underbrace{a_1 + 5d}}, \dots$$

نکته:

می‌دانیم اختلاف دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی برابر قدرنسبت است، مثلاً:

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_6 - a_5 = d$$

حالا فرض کنید در $2n$ جمله‌ی اول یک دنباله بخواهیم تفاضل «مجموع جملات زوج» و «مجموع

جملات فرد» را حساب کنیم.

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) \\ &= \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \dots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n-1})}_d = \underbrace{d + d + \dots + d}_{n} = nd \end{aligned}$$

مثال: در 40 جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد 220 و مجموع

جملات شماره‌های زوج 230 می‌باشد، تفاضل جمله‌ی اول و قدرنسبت را به دست آورید:

حل: (جمله اول a_1 و قدرنسبت d)

❖ جملات فرد: جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت $2d$ و تعداد جملات فرد 20 تا:

$$s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$s_{\text{فرد}} = \frac{20}{2} [2a_1 + 19(2d)] \Rightarrow 220 = \overbrace{10(2a_1 + 38d)}^{20a_1 + 380d}$$

$$\stackrel{\div 20}{\Rightarrow} 11 = a_1 + 19d$$

❖ جملات زوج: جمله‌ی اول $a_2 = a_1 + d$ و قدرنسبت $2d$ و تعداد جملات زوج 20 تا:

$$s_{\text{زوج}} = \frac{20}{2} [2(a_1 + d) + 19(2d)]$$

$$230 = \underbrace{10(2a_1 + 40d)}_{20a_1 + 400d} \stackrel{\div 10}{\Rightarrow} 23 = 2a_1 + 40d$$

$$\begin{cases} a_1 + 19d = 11 \\ 2a_1 + 40d = 23 \end{cases} \rightarrow a_1 = \frac{3}{2} \quad d = \frac{1}{2}$$

$$a_1 - d = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

نکته 1) اگر تعداد جملات یک دنباله حسابی فرد باشد داریم: جمله وسط $\times n = s_n$

نکته 2) اگر تعداد جملات یک دنباله حسابی زوج باشد داریم:

واسطه حسابی دو جمله‌ی وسط $\times n = s_n$

نکته 3) برای نوشتن جمله‌ی عمومی از روی s_n ، از رابطه‌ی $a_n = s_n - s_{n-1}$ استفاده می‌کنیم.

نکته 4) مجموع جملات m تا m تا n یک دنباله‌ی حسابی ($m < n$) از رابطه‌ی $S_n - S_{m-1}$ به دست می‌آید.

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$a, aq, aq^2, \dots$$

جمله‌ی n ام این دنباله aq^{n-1} می‌باشد،

فرض کنیم مجموع n جمله‌ی اول این دنباله S_n باشد.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین را در q ضرب می‌کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

حال با نوشتن $S_n - S_n q$ داریم:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

نکته: مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مثال: مجموع 11 جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی روبرو را به دست آورید.

$$-3, x, y, 24, \dots \quad \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_4 = 24 \end{cases}$$

$$a_4 = a_1 q^3 \rightarrow 24 = -3q^3 \rightarrow q^3 = -8 \rightarrow q = -2$$

$$S_{11} = a_1 \frac{(1 - q^{11})}{1 - q} = \frac{-3(1 - (-2)^{11})}{1 - (-2)} = \frac{-3(2049)}{3} = -2049$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت منفی، جمله‌ی سوم برابر 15 و جمله‌ی پنجم برابر 60

است مجموع 4 جمله‌ی اول را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_3 = 15 \\ a_5 = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 q^2 = 15 \\ a_1 q^4 = 60 \end{cases}$$

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{q^4}{q^2} = q^2 = 4 \rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{q < 0} q = -2$$

$$a_1 q^2 = 15 \rightarrow a_1 (-2)^2 = 15 \rightarrow a_1 = \frac{15}{4}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \rightarrow S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = \frac{\frac{15}{4}(-15)}{3} = \frac{-75}{4}$$

تمرین: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع پنج جمله‌ی اول 192 و مجموع ده جمله‌ی اول 186

است. نسبت جمله‌ی چهارم به جمله‌ی اول را به دست آورید.

نکته 1: نسبت مجموع $2n$ جمله‌ی اول به مجموع n جمله‌ی اول در یک دنباله‌ی هندسی برابر

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

است با:

نکته 2: برای نوشتن جمله‌ی عمومی از روی S_n از رابطه‌ی $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده می‌کنیم.

نکته 3: مجموع جملات m تا n ام یک دنباله‌ی هندسی $(m < n)$ از رابطه‌ی

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

(جملات شماره فرد، جملات شماره زوج)

- جمله‌های شماره فرد دنباله هندسی یعنی جمله‌های اول، سوم و پنجم و ... تشکیل یک

دنباله هندسی با جمله‌ی a_1 و قدرنسبت q^2 می‌دهند.

$$\begin{array}{ccc}
 \times q^2 & & \times q^2 \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 a_1 & a_1q^2 & a_1q^4, \dots
 \end{array}$$

- جمله‌های شماره زوج دنباله‌ی هندسی یعنی جمله‌های دوم و چهارم و ششم و ... هم

تشکیل یک دنباله هندسی با جمله‌ی اول a_1q و قدرنسبت q^2 می‌دهند.

$$\begin{array}{ccc}
 \times q^2 & & \times q^2 \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 a_1q & a_1q^3 & a_1q^5, \dots
 \end{array}$$

یک اتحاد مهم:

$$(a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \mp b^3$$

اتحاد چاق و لاغر:

می‌خواهیم حاصل عبارت: $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ را با فرض $a \neq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ به دست

آوریم.

اعداد 1 و a و a^2 و a^{n-1} و ... باهم تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=a$ می‌دهند که تعدادشان هم n تاست.

مجموع آنها را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1(1 - a^n)}{1 - a} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

کافی است متساوی بالا را طرفین وسطین کنیم:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-3} + \dots + a^2 + a + 1)$$

مثال: جواب معادله‌ی $\frac{x^{10}-1}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}$ را به دست آورید.

عبارت مخرج را با توجه به اتحاد ساده می‌کنیم:

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$$

$$\frac{x^{10} - 1}{x^5 - 1} = 33 \xrightarrow{\text{صورت اتحاد مزدوج}} \frac{(x^5 - 1)(x^5 + 1)}{x^5 - 1} = 33 \rightarrow x^5 + 1 = 33$$

$$x^5 = 32$$

$$x = 2$$

تست و تمرین‌های مجموع جملات

1. در یک دنباله‌ی هندسی افزایشی با جملات $4, a, 9, b, \dots$ مجموع شش جمله اول را به

دست آورید.

2. مجموع چند جمله‌ی هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر 1026 است؟

3. مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(4n + 2)$ به دست

آورید. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

31 (1) 15 (2) 22 (3) 27 (4)

4. دنباله‌ی هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله‌ی اول آن کدام است؟

$\frac{41}{22}$ (1) $\frac{21}{16}$ (2) $\frac{11}{8}$ (3) $\frac{23}{16}$ (4)

5. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی کنید که تعداد جملات هر دسته برابر با

شماره‌ی آن دسته باشد، $\dots, (7, 9, 11), (3, 5), (1)$ جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم

کدام است؟

415 (1) 419 (2) 421 (3) 423 (4)

6. در یک دنباله‌ی عددی مجموع بیست جمله‌ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن

است اگر جمله سوم برابر 6 باشد، جمله دهم را بنویسید.

7. اگر نسبت مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی به مجموع 3 جمله‌ی اول آن برابر

4 شود، n کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ ($q \neq \mp 1$)

10 (1) 12 (2) 15 (3) 18 (4)

8. مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این

دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم کدام است؟

9 (1) $\frac{29}{3}$ (2) $\frac{49}{3}$ (3) 18 (4)

9. حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را

به دست آورید.

10. مجموع تمام اعداد دو رقمی مضرب 7 را به دست آورید.

11. در دنباله‌ی $5, 9, 13, \dots$ حداقل چند جمله‌ی اول را جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از 900

باشد؟

20 (1) 21 (2) 22 (3) 23 (4)

12. مجموع $n + 2$ عدد فرد متوالی شروع از 1 کدام است؟

$(n + 2)^2$ (1) $n^2 + 2n$ (2) $(n + 1)^2$ (3) $n^2 + 4n$ (4)