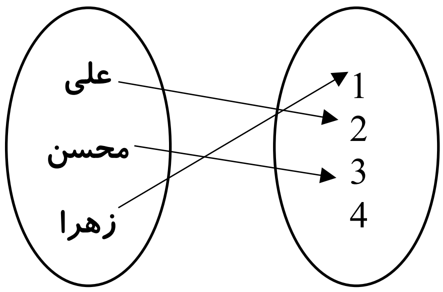
تابع

رابطه: یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B یعنی نسبت دادن اعضای مجموعهٔ A به اعضای مجموعهٔ B.

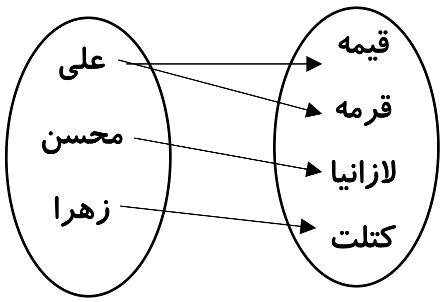
هر رابطه بین دو مجموعه را می‌توان به صورت نمودار پیکانی نمایش داد.

مثال:

1) **تعداد خواهران هر فرد**



2) **غذاهای مورد علاقه هر فرد**



تابع: هر تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

(مثال 1 تابع است اما 2 نیست)

نکات مهم(تابع از مجموعه A به مجموعه B)

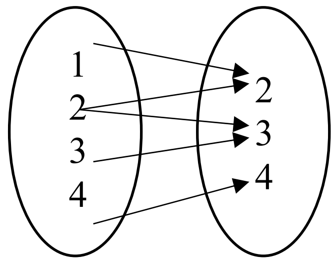
1) **به هر عضو از A باید عضوی از B نسبت داده شود.**

2) **به هیچ عضوی از A نباید دو عضو (متمایز) از B نسبت داده شده باشد. (یعنی از یک عضو A نباید 2 فلش خارج شود).**

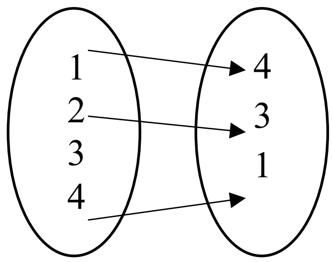
3) **ممکن است عضوی از B باشد که به هیچ عضوی از A نسبت نداده شده باشد.**

مثال: کدام رابطه تابع است؟

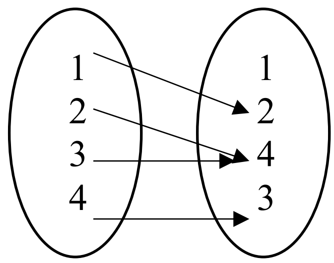
(1



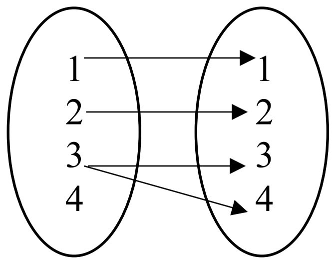
(2



(3



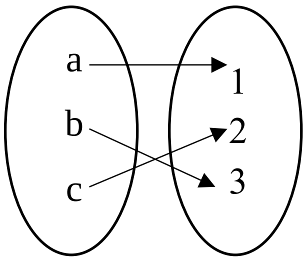
(4



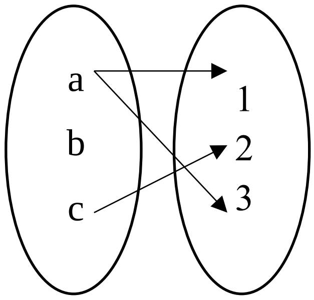
حل: در گزینه 3، از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است و این رابطه تابع است.

تمرین: تعیین کنید کدام رابطه تابع است و کدام تابع نیست؟

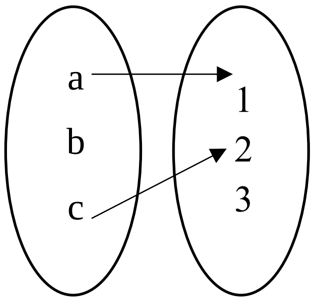
الف)



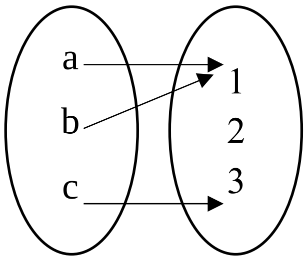
ب)



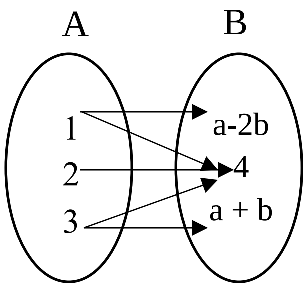
پ)



ت)

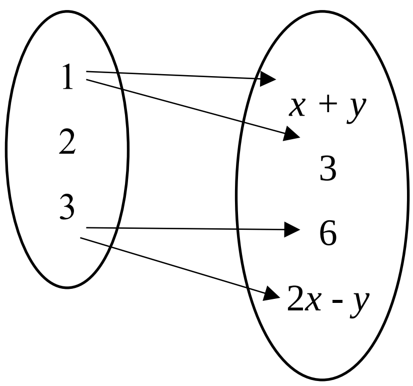


مثال: نمودار مقابل نمایش یک تابع است. مقدار a را به دست آورید.



$$\begin{cases} a-2b=4 \\ a+b=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=4 \end{cases}$$

تمرین: نمودار داده شده یک تابع است، x را به دست آورید.



نکته: پس اگر نمودار پیکانی یک رابطه داده شده باشد، برای اینکه تابع باشد باشد:

الف) همه پیکان‌ها همهٔ اعضای یک مجموعه را به مجموعهٔ دیگر نظیر کند.

ب) از هر عضو بیش از یک پیکان خارج نشود.

نمایش زوج مرتبی یک تابع:

به دوتایی (x , y) که ترتیب نوشتن در آنها مؤثر باشد زوج مرتب می‌گوئیم.

$$(x, y) \neq (y, x)$$

- ✓ هر رابطه بین مجموعهٔ A و مجموعهٔ B را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهیم.

(a , b) یعنی زوج مرتبی که مؤلفه اولش a و مؤلفه دومش b است.

در (x , y) :
x : طول نقطه ، ورودی تابع
y : عرض نقطه ، خروجی تابع

در زوج‌های مرتب اگر (c , d) = (a , b) ، آنگاه a = c و همچنین b = d است.

نکته: در نمایش زوج مرتبی تابع، هیچ دو زوج مرتب متمایزی وجود ندارد که مؤلفهٔ اولشان برابر باشد و مؤلفه‌های دومشان برابر نباشد.

مثال: اگر $(x - y, 2y) = (5, x)$ ، x , y را بیابید.

$$\begin{cases} 5 = x - y \\ x = 2y \end{cases} \longrightarrow 5 = 2y - y$$

$$y = 5, x = 10$$

تمرین: x , y را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(x + y ,4)$ و $(3 , 6x - y)$ با هم برابر باشند.

تمرین: اگر $(b , b^2 - b) = (a^2, 0)$ آنگاه a چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟

مثال: رابطهٔ زیر یک تابع است، $a - b$ کدام است؟

$$\{(1, a + b)(2,5)(1, -5)(2,2a - 3b)(5, a)\}$$

$$\begin{cases} a + b = -5 \\ 2a - 3b = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$a - b = +1$$

تمرین: اگر رابطهٔ زیر تابع باشد، مقدار x را بیابید.

$$\{(3, -1)(2,3)(3, x^2 - 2)(1,6)(x, 4)\}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار m رابطهٔ زیرتابع است؟

$$\{(m, 2)(m - 1, m + 1)(m^2, m + 1)\}$$

نمایش تابع به صورت جدولی:

در این نمایش، یک جدول دوسطری رسم می‌کنیم و مؤلفه‌های اول رابطه را در سطر اول جدول و مؤلفه‌های دوم رابطه را در سطر دوم جدول درست زیر مؤلفه نظیر آن می‌نویسیم.

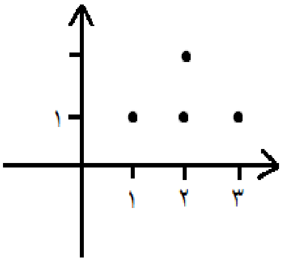
نمایش تابع به صورت نمودار مختصاتی:

اگر نمایش زوج مرتبی رابطه‌ای را داشته باشیم، می‌توانیم نمودار مختصاتی آن را رسم کنیم.

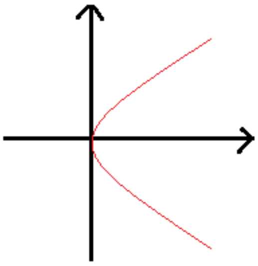
نکته: یک رابطه وقتی تابع است که در نمودار مختصاتی آن، هر خطی موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کدام یک از نمودارهای زیر تابع است؟

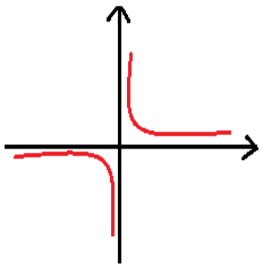
الف)



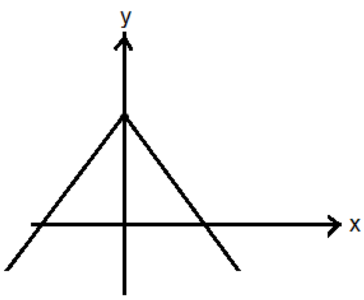
ب)

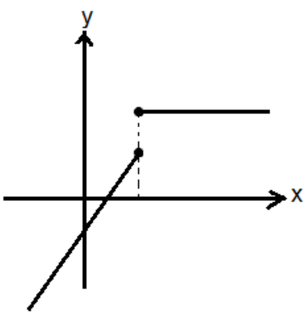


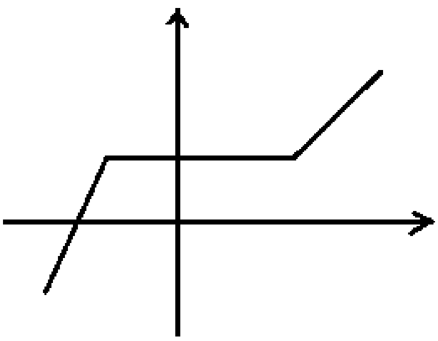
پ)

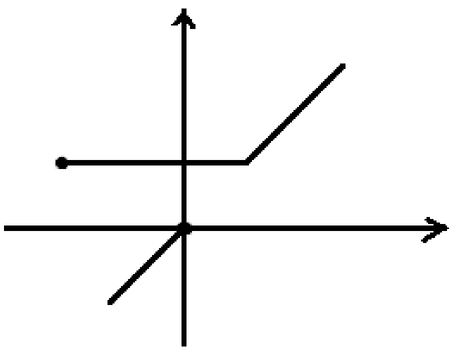


تمرین: چندتا از رابطه‌های زیر تابع است؟









دامنه و برد:

اگر تابعی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده شده باشد، آنگاه به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول یک تابع (دامنه) و به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های دوم (برد) می‌گوییم.

مجموعهٔ مؤلفه‌های اول : دامنه D_f :

مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم : برد R_f :

مثال: اگر عدد 3 در دامنهٔ تابع $f = \{(4, m-1)(m+1,2m)(5,3m)\}$ باشد، کدام عدد در برد تابع قرار ندارند؟

1) 4 2) 2 3) 1 4) 6

$$D_f = \{4\ ,5\ ,m+1\}$$

$$m+1 = 3 \longrightarrow m = 2$$

$$R_f = \{1\ ,4\ ,6\} \qquad\qquad 2 \notin R_f$$

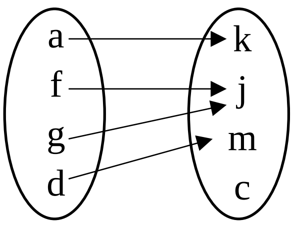
تمرین: دامنه و برد هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f = \{(1\ ,2)(2\ ,4)(3\ ,5)\}$

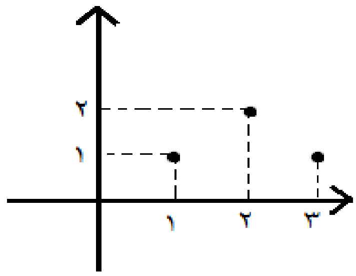
ب)

فرد	زهرا	سوگند	سامان	ایمان
ماه تولد	تیر	مرداد	فروردین	اسفند

پ)



ت)

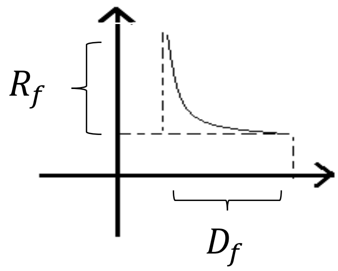


تعیین دامنه و برد از روی نمودار:

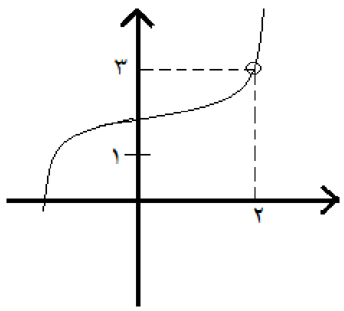
اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم آنگاه:

1) **برای به دست آوردن دامنه تابع نمودار را روی محور** x**ها تصویر می‌کنیم. محدوده** x **دامنه تابع است.**

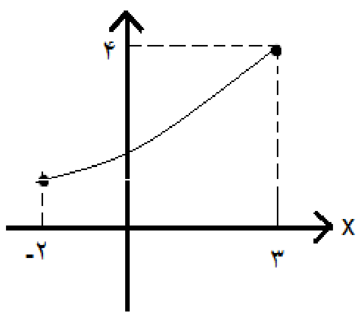
2) **برای به دست آوردن برد تابع نمودار را روی محور** y**ها تصویر می‌کنیم.**



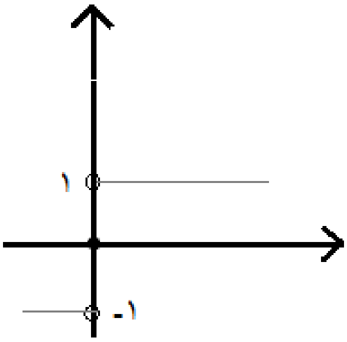
تمرین: نمودار f **در شکل زیر رسم شده است. برد این تابع را بنویسید.**

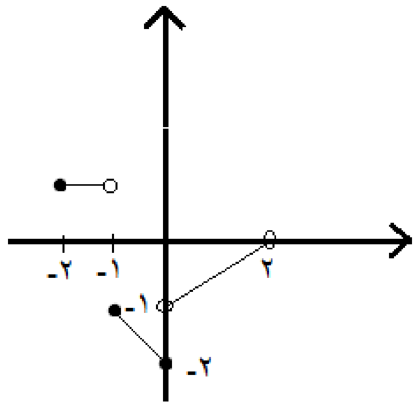


تمرین: شکل مقابل نمودار تابع f **است. دامنه و برد آن را مشخص کنید.**

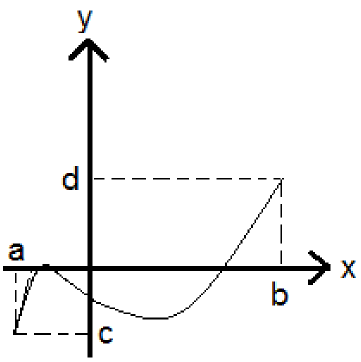


تمرین: در نمودارهای زیر دامنه و برد را مشخص کنید.





تمرین: نمودار تابع f در شکل روبرو رسم شده است. اگر دامنهٔ تابع بازه‌ی [−3 و 8] و برد تابع بازه‌ی [−4 و 5] باشد، مقدار $b + c$ را به دست آورید.



مقدار تابع:

اگر زوج مرتب (a , b) در نمایش زوج مرتبی تابع f آمده باشد، می‌نویسیم f(a)=b یعنی مقدار تابع f در نقطه‌ی a برابر b است.

تست: در تابع $f=\{(1,m+1)(2,m-5n)(3,3n)(5,m-2)\}$ اگر f(2) = 6 ، 3f(1)=6 مقدار f (3) – f (5) کدام است؟

1 (1 2 (2 –2 (3 –1 (4

حل:

$$3f(1)=6\rightarrow f(1)=2$$

$$m+1=2\rightarrow m=1$$

$$f(2)=6\rightarrow m-5n=6\rightarrow n=-1\rightarrow f(3)=3n=-3\,,$$

$$f(5)=m-2=-1$$

$$f(3)-f(5)=-2$$

تمرین: اگر f (3x + 1) = 2x + 5 ، مقدار f(4) را حساب کنید.

مثال: اگر f (ax – b) = ax + b ، مقدار f(0) کدام است؟ $(a\neq 0)$

حل:

$$ax-b=0\ \rightarrow x=\frac{b}{a}$$

$$f(ax-b)=ax+b$$

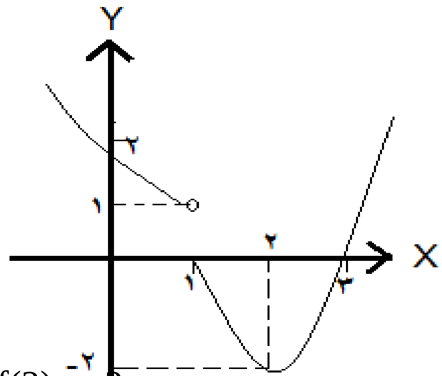
به جای x قرار دهیم $\frac{b}{a}$:

$$f\left(a\left(\frac{b}{a}\right)-b\right)=a\left(\frac{b}{a}\right)+b=b+b=2b$$

تمرین: اگر $f(2x-1)=4x^2+2x-3$ باشد، f(x) را به دست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ ، مقدار f(f(-1)) را به دست آورید. (سراسری 88)

مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار f(2) + f(1) + f(0) چقدر است؟



حل:

f(2) = -2

f(1) = 0 , f(0) = 2

بنابراین f (2) + f (1) + f (0) = 0

تمرین: در تابع f با ضابطه $f(x)=3-2x$ مقدار $f(2)-f(-2)$ را به دست آورید.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ به مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

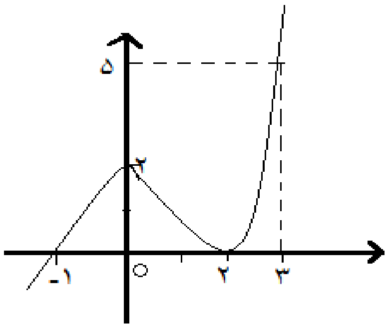
(سراسری 88)

1) ت ن 2) 6 3) 8 4) 12

تست: در تابع $f=\{(1,2)(2,-1)(-1,2)(3,1)\}$ مقدار $\frac{f(f(3))}{f(2)}$ کدام است؟

1 (1   2 (2 -2 (3 -1 (4

تست: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(3)+f(-1)}{f(2)+f(0)}$ کدام است؟



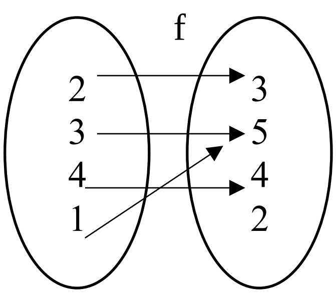
$\frac{2}{3}$ (1 $\frac{5}{3}$ (2

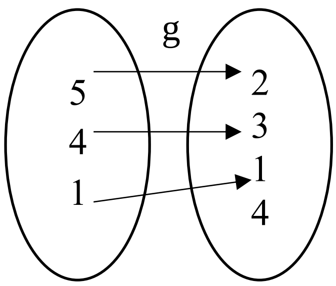
2 (3 $\frac{5}{2}$ (4

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x}{13}+96$ و $f(95)=b$ و $f(a)=95$ ، مقدار $\frac{95-a}{95-b}$ چقدر است؟

تمرین: اگر همواره $f(x)-2f(-x)=x-2$ ، مقدار f(-1) را به دست آورید.

تست: با توجه به نمودار توابع f , g ، به ازای کدام مقدار a عبارت g(f(a)) بی معنی است؟





1 (1

2 (2

3 (3

4 (4

ضابطه‌ی تابع:

اگربتوان رابطه‌ای میان مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده یک تابع را با یک تساوی نشان داد، این تساوی را ضابطه‌ی تابع گوئیم و آن را نمایش جبری تابع می‌نامند.

مثال: اگر P محیط و S مساحت یک دایره باشد، کدام تابع مساحت دایره را به صورت تابعی از محیط آن نشان می‌دهد؟

1) $S(P) = 4\pi P^2$ 　　　 2) $S(P) = \frac{1}{4}P^2$

3) $S(P) = \frac{1}{12}P^2$ 　　　 4) $S(P) = \frac{1}{4\pi}P^2$

حل: R شعاع دایره، $P = 2\pi R$ و $R = \frac{P}{2\pi}$ و

$$S = \pi R^2 \rightarrow S = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi P^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}P^2$$

تمرین: مساحت یک مستطیل 25 متر مربع است. ضابطه تابعی را بنویسید که محیط این مستطیل را به عرض مستطیل وابسته کند.

تمرین: طول یک مستطیل 3 واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای بنویسید که محیط مستطیل را به صورت تابعی از عرض آن بیان کند.

تابع خطی:

هر تابعی را به شکل $f(x) = ax + b$ باشد را تابع خطی گوییم.

مثال: اگر f تابع خطی باشد و $f(2) = 3$ و $f(3) = 5$ ، مقدار $f(6)$ را به دست آورید.

(2 و 3)
(3 و 5)

$$\rightarrow \begin{cases} 3 = 2a + b \\ 5 = 3a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

مثال: اگر f تابع خطی و $f(x) + f(2x) + f(3x) = 24x - 12$ ، حاصل $f\left(\frac{x}{4}\right)$ را به دست آورید.

حل:

$$ax + b + 2ax + b + 3ax + b = 24x - 12$$

$$6ax + 3b = 24x - 12$$

$$6a = 24 \, , 3b = -12$$

$$a = 4 \, , b = -4$$

$$f(x) = 4x - 4$$

$$f\left({}^{x}/_{4}\right) = 4\left({}^{x}/_{4}\right) - 4 = x - 4$$

تمرین: اگر تابع f، تابعی خطی باشد مقدار n را محاسبه کنید.

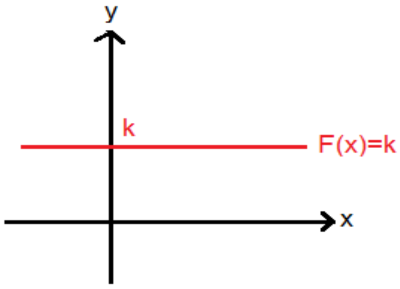
$$f = \{(1\,, m+1)(2\,, m)(-1\,, 2m+2)(n\,, 2n-1)\}$$

تمرین: اگر $f(x) = 2x + 1$ و برد f بازه‌ی $[7$ و $-11)$ باشد، مجموع عددهای صحیح در دامنه‌ی f چقدر است؟

تمرین: در مورد تابع خطی f به ازای هر مقدار x تساوی $f(f(x)) = 4x + 6$ برقرار است. مقدار $f(0)$ را به دست آورید.

انواع تابع:

تابع ثابت: تابعی است که برد آن فقط یک عضو دارد. اگر f تابعی ثابت باشد، ضابطه آن به شکل $f(x)=K$ که k عددی ثابت و حقیقی است. (یعنی فرق نداره ورودی چی باشد، خروجی k هست).



مثال: اگر $f = \{(1, a^2+4)(-2, 5a)(3, b+1)\}$ تابعی ثابت باشد حداقل مقدار ab را به دست آورید. (یعنی مؤلفه‌های دوم برابرند.)

$$\underbrace{a^2 + 4 = 5a}_{①} = b + 1$$

$$① \; a^2 - 5a - 4 = 0 \rightarrow (a-1)(a-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a = 1 \rightarrow b + 1 = 5a \rightarrow b = 5 - 1 = 4$$

$$a = 4 \rightarrow b + 1 = 20 \rightarrow b = 19$$

$$ab \rightarrow 19 \times 4$$

$4 \times 1 \rightarrow$ جواب مسئله

مثال: اگر $f(x) = (a+2)x^2 + (b-a)x + a + b$ تابعی ثابت باشد، مقدار f(-4) را به دست آورید.

چون گفته f ثابت نباید جمله‌ای برحسب x داشته باشیم و ضرایب x و x^2 باید صفر باشد:

$$\begin{cases} a+2=0 & a=-2 \\ b-a=0 & b=a=-2 \end{cases}$$

$$f(x) = a+b = -2-2 = -4 \rightarrow f(-4) = -4$$

تمرین: اگر $f(x) = \frac{3x+k}{2x-4}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار k را به دست آورید.

تمرین: m را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \frac{mx+5}{2x+1}$ یک تابع ثابت باشد.

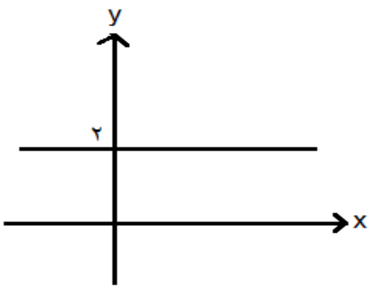
نکته: تابع f زمانی ثابت است که مستقل از x باشد، برای این منظور کافیه که ضرایب جملات هم درجه متناسب باشد.

در تمرین قبل:

$$\frac{m}{2} = \frac{5}{1} \quad \rightarrow \quad m = 10$$

$$f(x) = \frac{10x+5}{2x+1} = \frac{5(2x+1)}{2x+1} = 5$$

تمرین: شکل روبرو نمودار $f(x) = (a+b-1)x + b - 4$ است. مقدار b – a را به دست آورید.



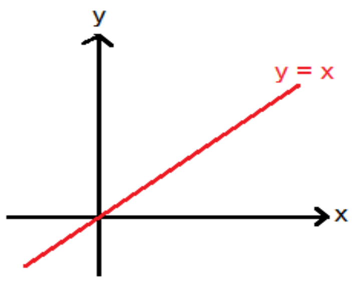
تمرین: اگر $f=\{(2\,,4)(3\,,m-2)(-2\,,m+2n)(-3\,,mn+k)\}$ تابع ثابت باشد، k را بیابید.

تمرین: به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\frac{2x+1}{ax-3}$ یک تابع ثابت است؟

تابع همانی:

تابعی است که دامنه و برد آن برابرند و هر عضو از دامنه‌ی تابع به همان عضو در برد تابع نظیر می‌شود.

ضابطه‌ی تابع همانی اگر $D_f=\mathbb{R}$ باشد، به صورت $f(x)=x$ یا $y=x$ می‌باشد.



مثال: **اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد و $f(5-3b)=4b-9$ ، مقدار b را به دست آورید.**

(همانی: $x=y$)

$\rightarrow 5-3b=4b-9 \rightarrow 4b+3b=14$

$\rightarrow 7b=14 \rightarrow b=2$

مثال: اگر تابع $f(x) = 3x + (a+b)x + a - 2$ **تابعی همانی باشد، مقدار** a + f(b) **چقدر است؟**

چون f **همانی است پس باید** f(x)=x **در نتیجه** a – 2 = 0 **و از** (3 + a + b)x **داریم:**

3 + a + b = 1

$a = 2$

$b = 1 - 3 - a = -4$

$a + \underbrace{f(b)}_{b} = 2 + (-4) = -2$

تمرین: اگرتابع همانی از مجموعه‌ای {1 , 2 , 3} **به مجموعه‌ی** {a , b , c} **وجود داشته باشد، مقدار** abc **را به دست آورید.**

تمرین: تابع f **به صورت زیر یک تابع همانی است،** k **را به دست آورید.**

$f = \{(-2\,, m - 2n)(3\,, n + m)(mn\,, k)\}$

تمرین: اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b-3)x + a + b - c$ **همانی باشد مقدار** C **چقدر است؟**

تمرین: اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2ax + 4a - 4}{x - 2}$ **ضابطه یک تابع همانی باشد، مقدار** f(a) **را به دست آورید.**

تمرین: اگر $f(x) = (a-b)x + c + 3$ تابع همانی و تابع

$g(x) = (a+b)x - 2a$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(a) + g(b)$ را به دست آورید.

تابع چند جمله‌ای:

تابعی است که نمایش جبری آن چند جمله‌ای یک متغیره است.

مثال: در بازه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ می‌دانیم $f(1) = 2$ و $f(-1) = -4$ ، مقدار ab را به دست آورید.

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + a + b \rightarrow 2 = 1 + a + b \rightarrow a + b = 1 \quad ①$

$x = -1 \rightarrow f(-1) = -1 + a - b$

$\rightarrow -4 = -1 + a - b \rightarrow a - b = -3 \quad ②$

با حل ① و ② داریم:

$$a = -1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad ab = -2$$

تمرین: اگر $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 5$، مقدار $f(1+\sqrt[3]{7})$ را به دست آورید.

تمرین: ضابطه‌ی تابع درجه دومی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به دست آورید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض 1 و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -1 قطع کرده است و از نقطه‌ی $(-2$ و $3)$ نیز عبور می‌کند.

تست: اگر $f(x) = ax^7 + bx^5 + cx + 2$, $f(-2) = 10$ مقدار f(2) کدام است؟

1) -4 　　 2) 6 　　 3) -8 　　 4) -10

تست: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی [5 و 3-] باشد و همواره $f(x) = x^2 - 9$، چند عدد صحیح در برد f قرار دارند؟

1) 25 　　 2) 26 　　 3) 55 　　 4) 64

تابع چند ضابطه‌ای:

تابعی که بتوان آن را روی زیر مجموعه‌های مختلف دامنه‌اش با ضابطه‌های مختلف نشان داد.

به بیان دیگر تابعی که به ازای مقادیر مختلف x ضابطه‌های متفاوتی داشته باشد، تابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & x \in A_n \end{cases}$$

که در آن $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ برابر با دامنه‌ی تابع f است.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x > 2 \\ 2x + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار f(f(2)) چقدر است؟

باید مقدار تابع را با شرایط ضابطه‌ها مقایسه کنیم.

$2 \geq 2 \ \rightarrow f(2) \rightarrow$ **در ضابطه دوم 2 بزار**

$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

$f(5): 5 > 2 \rightarrow$ **در ضابطه اول 5 بزار**

$f\big(f(2)\big) = f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} kx+4 & x<4 \\ \frac{8}{x+1} & x\geq 4 \end{cases}$ و $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$ ، مقدار k را به دست آورید.

$f(2):2<4 \Longrightarrow k\times 2+4=2k+4=f(2)$

$f(4):4\geq 4 \ \Longrightarrow \frac{8}{4+1}=\frac{8}{5}=f(4)$

$f(2)-f(4)=2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$

$2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4$

$2k=-2 \longrightarrow k=-1$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+mx & x>-1 \\ x+m & x\leq -1 \end{cases}$ باشد، مقدار m چقدر است؟

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>0 \\ 4-x & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید.

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 2-x & x\notin Q \end{cases}$ و a عددی گنگ باشد مقدار f(f(a)) چقدر است؟

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\geq 0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases}$ را رسم کنید.

تست: اگر $f(x)=\begin{cases} -x+8 & x<3 \\ x+2 & x\geq 3 \end{cases}$ برد f کدام است؟

1) $[3,+\infty)$ 2) $[5,+\infty)$ 3) $(-\infty,5]$ 4) $(-\infty,3]$

تست: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & x>3 \\ 2x+3 & x\leq 3 \end{cases}$ مفروض است، مقدار $f\big(f(5)\big)$ کدام است؟ (سراسری تجربی 90)

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

تست: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1\\ 2x-{}^{3}/_{4} & x\geq 1\end{cases}$ **مفروض است.** $f(f(\frac{3}{4}))$ **کدام است؟ (سراسری تجربی 75)**

1) $\frac{3}{4}$

2) $\frac{3}{2}$

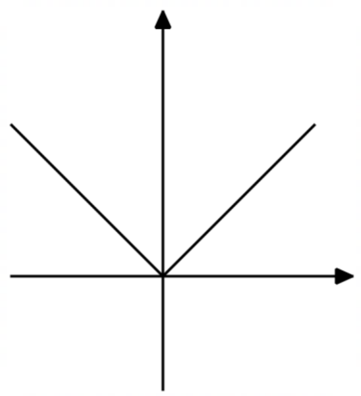
3) $\frac{5}{4}$

4) $\frac{9}{4}$

تابع قدرمطلق:

تابعی است که هر عضو دامنه‌اش را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند، اگر f تابع قدرمطلق باشد نمایش جبری آن $f(x)=|x|$ **است.**

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$$



نکات مهم.

1) $|x|=|-x|$

2) $|x^2|=|x|^2=x^2$

3) $\sqrt{x^2}=|x|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad (y\neq 0)$

مثال:

$$1)\ \left|1-\sqrt{3}\right| = +\sqrt{3}-1$$

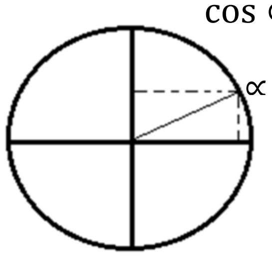
$$2)\ \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{2+3-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$3)\ \sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad 0 < \propto < \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{sin^2\alpha + cos^2a - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$$

$$= |\sin\alpha - \cos\alpha| = \cos\alpha - \sin\alpha$$

$\cos\propto > \sin\propto$

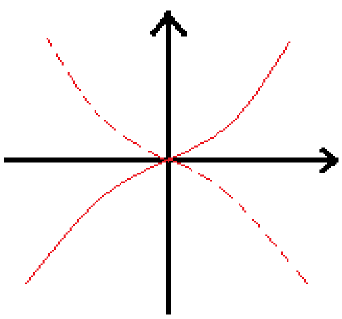


نکته: به کمک تعریف قدرمطلق می‌توانیم توابعی که در آنها قدرمطلق وجود دارد را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم. برای این کار کافیست عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و با توجه به علامت عبارت، قدرمطلق را از ضابطه‌ی تابع حذف می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = x|x|$ را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به تابع دو ضابطه‌ای بالا برای $x \geq 0$ $y = x^2$ و برای $x < 0$ $y = -x^2$ را رسم می‌کنیم.



تمرین: نمودار تابع $y = 2x - |x|$ را رسم کنید.

تمرین: نمودار $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

تمرین: نمودار تابع $y = x - |x| + 1$ را رسم کنید.

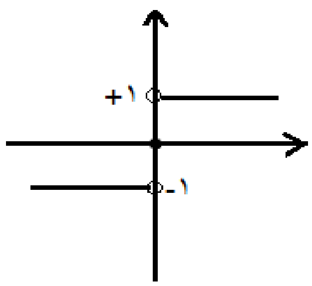
تست: در تابع زیر حاصل $f\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + f\left(\sqrt{5} - 2\right)$ کدام است؟

$f(x) = 5|3x - 1| + 3|5x - 1|$

1) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ 2) 4 3) $\sqrt{3} - 2$ 4) 6

تعریف: (تابع علامت) (Sgn(x))

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



نکته: $x\, sgn(x) = |x|$

$D_f = \mathbb{R}$

$R = \{-1, 0, 1\}$

تمرین: مساحت ناحیه‌ی محدود به زیر نمودار تابع $f(x) = x - |2x - 1|$ و بالای محور طول‌ها را به دست آورید؟

تمرین: مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{x^2-8x+16}=4-|x|$ شامل چند عدد صحیح است؟

تست: بیشترین مقدار تابع $f(x)=|2x-7|-2|x+1|$ کدام است؟

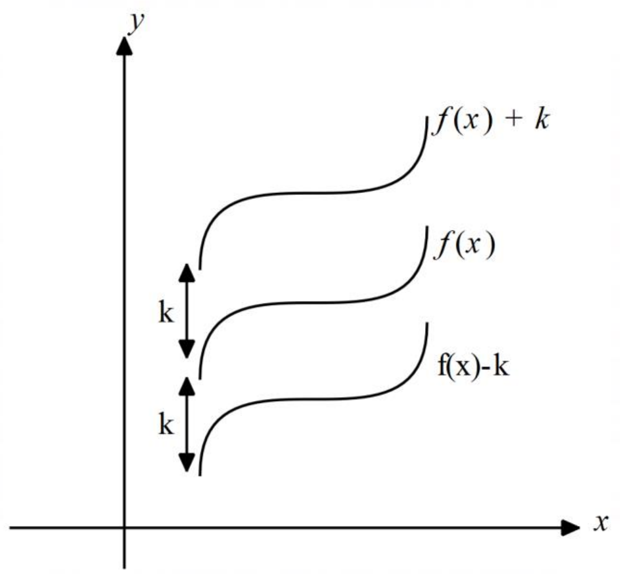
1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

رسم تابع به کمک انتقال:

می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی تابع‌های معروف رسم کنیم. برای این منظور از انتقال استفاده می‌کنیم.

1) انتقال عمودی (انتقال در راستای محور yها):

- ✓ **برای رسم نمودار $f(x)+k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.**
- ✓ **برای رسم $f(x)-k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.**



ویژه علاقه‌مندان:

1) **عرض همه‌ی نقاط** f(x) **را** k **برابر می‌کنیم** $y = kf(x)$

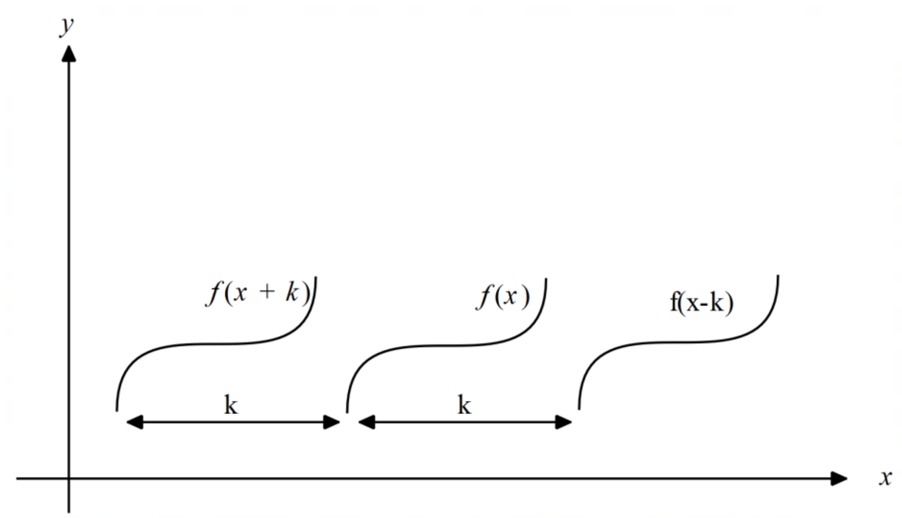
2) **عرض همه‌ی نقاط** f(x) **را بر** k **تقسیم می‌کنیم.** $y = \frac{1}{k}f(x)$

3) **نمودار** f(x) **را نسبت به محور** x**ها قرینه می‌کنیم** $y = -f(x)$

انتقال افقی (انتقال در راستای محور x**ها):**

فرض کنید نمودار تابع f **را داریم،** k **عددی حقیقی و** k >0

- ✓ **برای رسم نمودار** f(x + k) **، نمودار** f(x) **را** k **واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.**
- ✓ **برای رسم** f(x – k) **، نمودار** f(x) **را** k **واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.**



ویژه علاقه‌مندان:

1) طول همه نقاط f(x) را بر k تقسیم می‌کنیم. $y = f(kx)$

2) طول همه‌ی نقاط f(x) را k برابر می‌کنیم. $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$

3) نمودار f(x) رانسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. $f(x) = f(-x)$

مثال: نمودار $f(x) = |5 - x| + 1$ را با استفاده از تابع $|x|$ رسم کنید.

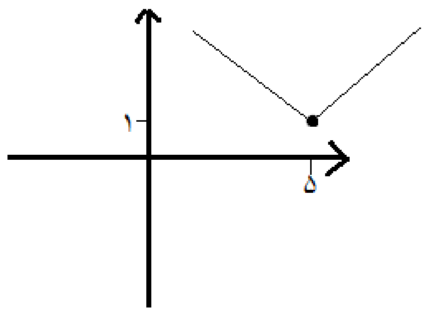
$f(x) = |5 - x| + 1$

نکته : $|A| = |-A|$

$f(x) = |5 - x| + 1 = |x - 5| + 1$

ابتدا $y = |x|$ را رسم می‌کنیم:

$|x| \xrightarrow{\text{5 واحد به راست}} |x - 5| \xrightarrow{\text{1 واحد بالا}} |x - 5| + 1$



تمرین: نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و بردشان را مشخص کنید.

1) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

2) $g(x) = |x + 1| - 1$

3) $h(x) = (x + 2)^2 - 3$

4) $f(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$

5) $g(x) = (x - 3)(x + 3)$

6) $k(x) = -x^2 - 6x - 9$

7) $f(x) = 2 - |x + 1|$

تمرین: نمودار $y=\sqrt{x^2-4x+4}+4$ را رسم کنید.

تمرین: نموداری پس از انتقال به اندازه یک واحد، به سمت راست و دو واحد به سمت بالا، به صورت $y=(x-2)^2$ درآمده است، قبل از انتقال معادله‌ی آن به چه صورتی بوده است؟

تست: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، 12 واحد در جهت مثبت سپس در امتداد محور yها 2 واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم.

فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی99)

1) $4\sqrt{5}$ 2) $6\sqrt{7}$ 3) $4\sqrt{17}$ 4) $6\sqrt{10}$

تست: مساحت محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^2-4x+4}\,,\,y=\frac{1}{2}x+2$ کدام است؟

(سراسری ریاضی 99)

1) 8 2) 9 3) 10 4) 12

تمرین: نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را دو واحد در راستای محور xها به چپ و یک واحد در راستای محور yها به بالا منتقل کرده‌ایم، نمودار تابع حاصل، نمودار اولیه را با چه طولی قطع می‌کند؟

تست: نمودار تابع $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را 4 واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (سراسری تجربی 93)

1) $-3/5$ 2) -3 3) $-2/5$ 4) -2

تمرین: در شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x-2) + 3$ رسم شده است. نمودار تابع f را بکشید.