

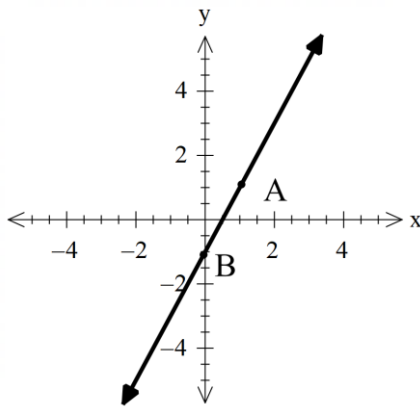
هندسه تحلیلی

رسم نمودار خط: در معادله خط دو نقطه را مشخص می‌کنیم و آنها را به هم وصل می‌کنیم.

مثال: خطوط زیر را رسم کنید.

$$y = 2x - 1 \text{ (الف)}$$

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 1 = 1 \\ x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 1 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \\ B \left| \begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array} \right. \end{array}$$



توضیح:

طول نقطه ها (x) به دلخواه انتخاب می‌شود.

$$2x - 5y - 3 = 0$$

ب:

$$x = 4 \rightarrow 2(4) - 5(y) - 3 = 0$$

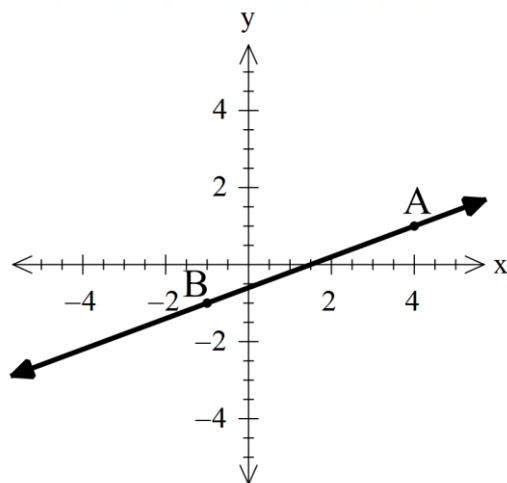
$$-5y = -5 \Rightarrow y = 1$$

$$A \left| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$x = -1 \rightarrow 2(-1) - 5y - 3 = 0$$

$$-5y = 5 \Rightarrow y = -1$$

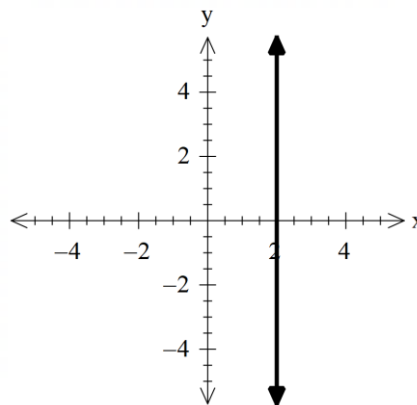
$$B \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right.$$



مثال: $x = 2$

توضیح در این رابطه x مقدار ثابت 2 است و به y بستگی ندارد.

$$A \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad B \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$



تمرین: نمودار خط های زیر را رسم کنید.

تمرین 1:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

تمرین 2:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

تمرین 3:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

تمرین 4:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -x - 3 \\ y + x = 6 \end{cases}$$

تمرین 5:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ x - 4y - 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

تمرین 6:

خطوط $y = x$ و $y = -x$ و $y = 3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مساحت محدود به این سه خط را به دست آورید.

تمرین 7:

$x = 0$ و $y = 1$ و $x + y = 4$ را رسم و مساحت بین آنها را به دست آورید.

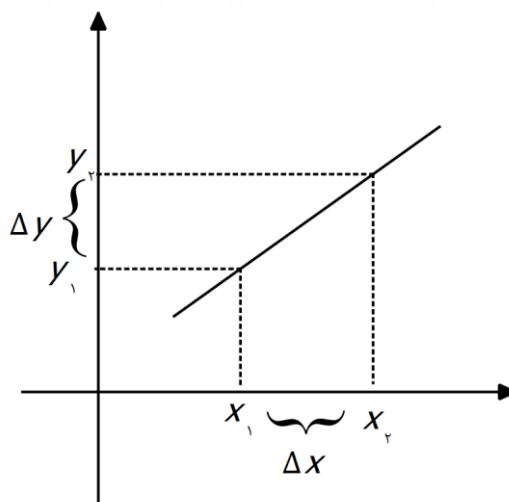
شیب خط:

تعریف: نسبت جابه جایی عمودی به جابه جایی افقی را شیب خط می نامیم.

جابه جایی عمودی Δy

جابه جایی افقی Δx

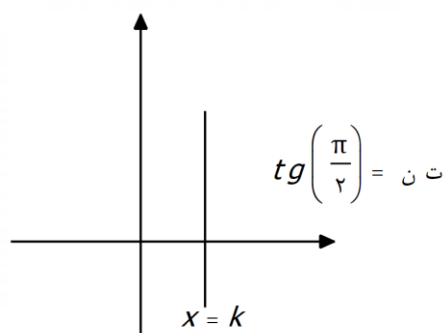
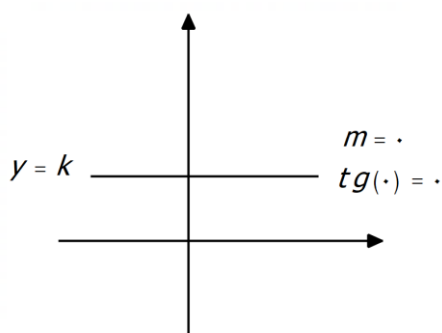
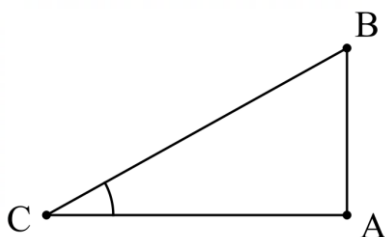
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

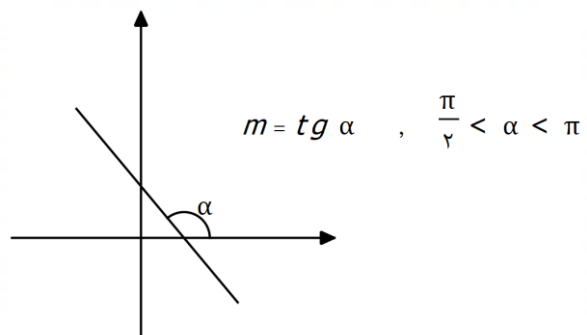
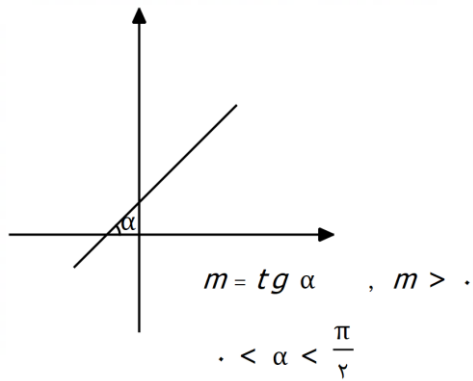


تعریف دوم:

تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور X می سازد برابر است با شیب خط

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$$





یادآوری

$$\operatorname{tg} 0 = 0 \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \operatorname{tg} 90^\circ = \text{ت}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{tg} 135^\circ = -1 \quad \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

دو زاویه مکمل باشند تانژانت آنها قرینه است.
 حواستون باشد زاویه آز 90° بیشتر باشد شیبش منفیه.

$y = ax + b$ شیب خط برابر a

$ax + by + c = 0$ شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$

$x = k$ شیب خط تعریف نشده

$y = k$ شیب خط برابر (0)

تمرین 8:

شیب خطی را بدست آورید که از A و B می گذرد.

(الف) $B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$

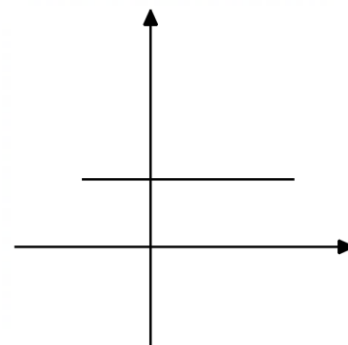
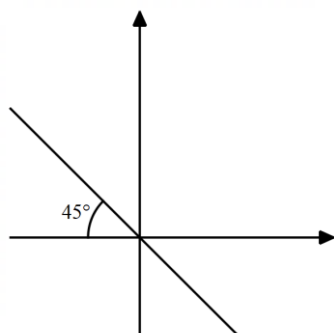
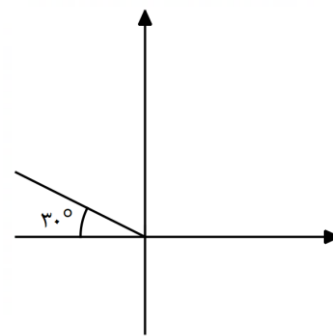
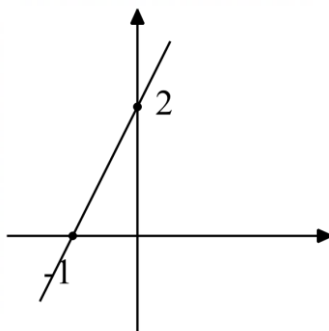
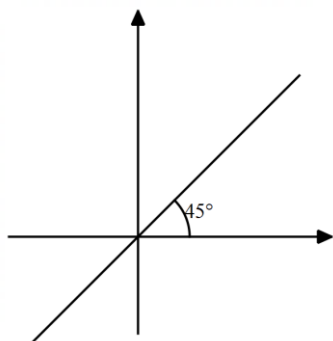
(ب) $B \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

(ج) $B \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

(د) $B \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

(ه) $A \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$ مبدأ مختصات

تمرین 9: شیب خط های زیر را به دست آورید.



تمرین 10: تعیین کنید هر خط با محور OX چه زاویه ای می سازد.

(الف) $y + x + 2 = 0$

(ب) $3y = \sqrt{3}x - 2$

(ج) $y = 2$

(د) $x = -1$

(هـ) $3y + x\sqrt{3} = 5$

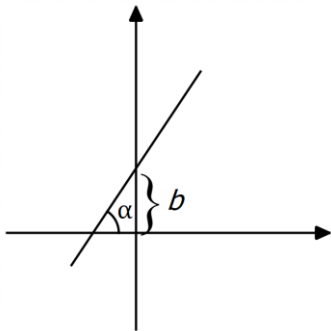
معادله خط:

شیب خط $tg \alpha = a$

تعیین معادله خط با داشتن $y = ax + b$ شیب و عرض از مبدأ

شیب $a =$

عرض از مبدأ $b =$



معادله خطی که شیب آن 2 و عرض از مبدأ آن 3 باشد :

$$y = 2x + 3$$

تمرین 11:

معادله خط را بنویسید.

(الف) شیب آن -2 و عرض از مبدأ آن -1

(ب) شیب آن 4 و عرض از مبدأ آن صفر

مثال: در معادله زیر شیب و عرض از مبدأ را به دست آورید.

$$3y + 2x + 5 = 0$$

$$3y = -2x - 5 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

شیب برابر $-\frac{2}{3}$

عرض از مبدأ برابر $-\frac{5}{3}$

معادله خط با داشتن دو نقطه :

$$B \begin{array}{l} x_B \\ y_B \end{array} \quad A \begin{array}{l} x_A \\ y_A \end{array}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تعیین شیب خط

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

معادله خط AB زیر را بنویسید.

تمرین 12:

الف) $B \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \quad A \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}$

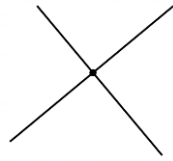
ب) $A \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \quad B \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}$

ج) $A \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \quad B \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array}$

د) $A \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \quad B \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$

ه) $A \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \quad B \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array}$

محل برخورد دو خط:



معادله دو خط را در یک دستگاه حل می کنیم.

مثال:

نقطه برخورد خط $2x - y = 3$ با نیمساز ناحیه اول و سوم و محور عرضها را تعیین کنید.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ y = x \end{cases} \quad 2x - x = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad 0 - y = 3 \quad y = -3 \quad \begin{array}{l} 0 \\ -3 \end{array}$$

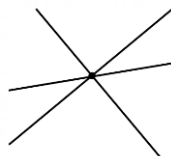
توضیح: برای تعیین محل برخورد با محور طولها به جای y صفر و برخورد با محور عرضها به جای x صفر قرار می دهیم.

تمرین 13:

مقدار a را طوری به دست آورید که خط $2x + y = 3$ و $ax + (a - 1)y + 4 = 0$ در نقطه ای به طول 1 یکدیگر را قطع کنند.

سه خط همس (متقارب)

خطوطی که از یک نقطه بگذرند اگر محل برخورد دو خط در خط سوم صدق کند سه خط متقاربند.

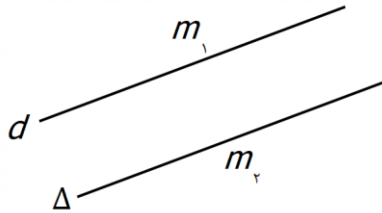


تمرین 14: مقدار a را طوری به دست آورید که خطوط زیر هم‌مس باشند.

$$y = x + 1$$

$$2x + y - 1 = 0$$

$$x + (a - 1)y + 4 = 0$$



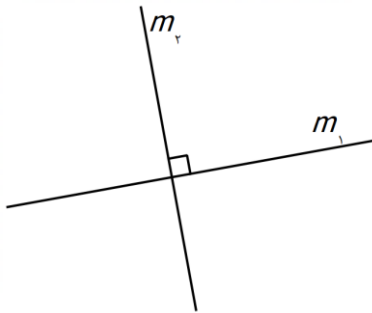
$$d \parallel \Delta \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

شیب خط Δ شیب خط d

شرط موازی بودن دو خط

شرط عمود بودن دو خط

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{یا} \quad m_1 m_2 = -1$$



تعیین مختصات وسط پاره خط

$$A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix} \quad \xrightarrow{\text{وسط } AB} \quad \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

تمرین 15:

اگر $A \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \end{vmatrix}$ باشد به دست آورید:

(الف) عرض از مبدأ خط AB

(ب) عرض از مبدأ عمود منصف AB

وضعیت دو خط

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + by' + c' = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{array} \right.$$

متقاطع

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \end{array} \right.$$

موازی

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \end{array} \right.$$

منطبق

$$aa' + bb' = 0$$

عمود

مثال: معادله سه ضلع مثلثی $x + y + 2 = 0$ و $y = 2x$ و $x = 4$ است. معادله ارتفاع وارد بر x

$4 =$ را به دست آورید.

$$AB: x + y - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$AC: y = 2x$$

$$BC: x = 4$$

$$x + 2x - 3 = 0$$

$$3x = 3, \quad x = 1, \quad A \begin{cases} 1 = x \\ 2 = y \end{cases}$$

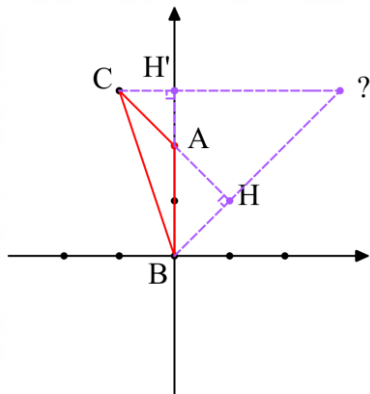
$x = 4$ موازی محور عرضها

AH ارتفاع وارد بر BC

$$AH \perp BC \rightarrow m_{AH} = 0$$

$$y - 2 = 0 (x - 0) \Rightarrow y = 2$$

مثال: مختصات نقطه هم‌مرسی ارتفاعها در مثلث ABC با رأس‌های



چيست؟ $C \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$, $B \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$, $A \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

$$m_{AC} = \frac{3-2}{-1-0} = -1$$

$$m_{BH} = \frac{-1}{m_{AC}} = 1$$

$$B \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad m = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

BH معادله ارتفاع $y = x$

$$m_{BA} = \text{ت ن}$$

$$m_{CH'} = 0$$

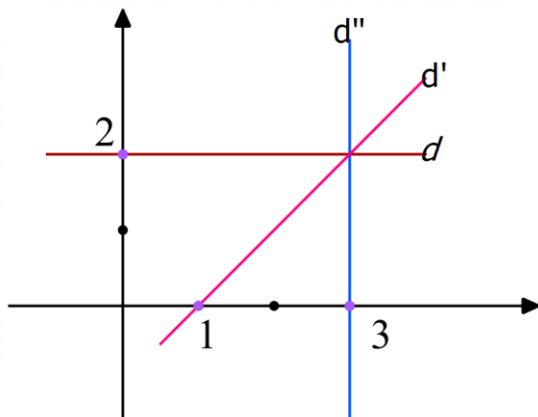
$$y - 3 = 0(x + 1)$$

CH' معادله ارتفاع $y = 3$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases} \text{ محل برخورد ارتفاع ها}$$

تمرین: شیب خط $3y + 5 = 0$ و شیب خط عمود بر آن را به دست آورید.

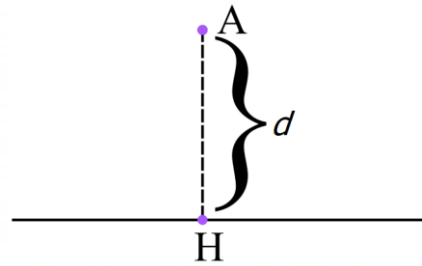
تمرین: در خط $3mx + y - 1 = m$, چه باشد تا عرض از مبدأ خط 3 باشد.



تمرین: معادله خط d , d' , d'' را مشخص کنید.

تمرین: مختصات نقطه ای به طول 1- روی خط گذرنده از $A \left| \begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.$ چیست؟

فاصله نقطه از خط:



$$ax + by + c = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases}$$

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین: در هر مورد فاصله نقطه از خط را به دست آورید.

$$A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right. \quad y = x$$

$$B \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad y = 2$$

$$C \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right. \quad 3x + 4y - 12 = 0$$

$$D \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right. \quad 3x = y - 7$$

تمرین: در هر مورد فاصله دو خط موازی را به دست آورید.

$$1) \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

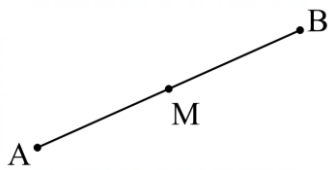
$$2) \begin{cases} y = x \\ x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 4x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$$

تمرین: اگر $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$ مرکز دایره و $y = x + 5$ مماس بر دایره باشد محیط و مساحت دایره را به دست آورید.

تمرین: اگر $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 6 \\ 0 \end{matrix} \right.$ دو سر قطر دایره باشند شعاع دایره را به دست آورید.



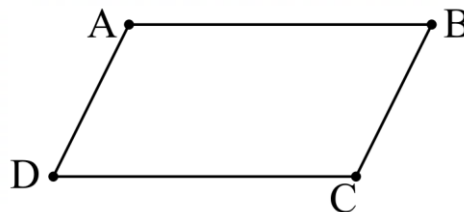
$$\begin{cases} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

تعیین مختصات وسط پاره خط

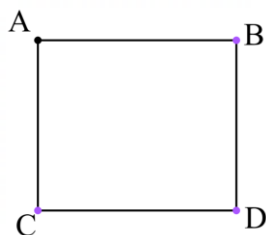
یادآوری:

تعیین مختصات رأس چهارم متوازی الاضلاع

$$\begin{aligned} x_A + x_C &= x_B + x_D \\ y_A + y_C &= y_B + y_D \end{aligned}$$



تمرین: اگر نقاط $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$ دو رأس مجاور یک مربع باشند معادله اضلاع AB , AC و محیط و مساحت مربع را به دست آورید.



$$A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

تمرین: نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی اند و فاصله دو خط را محاسبه کنید.

تمرین: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است اگر $A \left| \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right.$ یکی از رئوس این مربع باشد مساحت آن را به دست آورید.

تمرین: اگر $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $C \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند مختصات رأس چهارم مستطیل را بیابید.

تمرین: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = -2x - 1$ واقع است اگر $A \left| \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$ یکی از رئوس مربع باشد مساحت مربع را به دست آورید.

تمرین: نقطه ای روی خط $y = 3x$ بیابید که از دو نقطه $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$ به یک فاصله باشد.

تمرین: نقاط $A \left| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.$, $C \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ سه رأس یم مثلث هستند طول ارتفاع AB چقدر است؟

تمرین: دو خط به معادله $4x - y - 3 = 0$ و $(m + 1)x - 2y = 0$ یکدیگر را در نقطه ای به طول 3 قطع کرده اند مقدار m را به دست آورید.

تمرین: اگر فاصله نقطه $A \left| \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$ از خط $4x + my + 2 = 0$ برابر 4 باشد در این صورت مقدار m را به دست آورید .

تمرین: $(0 و 0)$ و $(3 و 0)$ دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع است. مختصات رأس سوم آن را بیابید. این مسئله چند جواب دارد؟