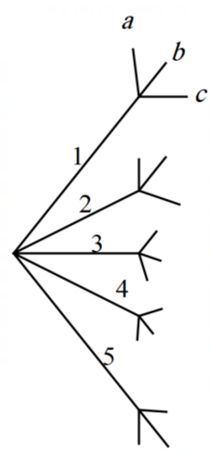
شمارش بدون شمارش

اصل ضرب:

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد ، برای مرحله اول m انتخاب و برای مرحله دوم برای هر کدام از این m روش بتوان از n روش استفاده کرد در کل $m \times n$ روش قابل انجام است.

مثال: **در یک رستوران 5 نوع غذا و سه نوع سالاد سرو میشود ، در صورتیکه یک مشتری ، یک غذا و یک سالاد سفارش دهد به چند طریق میتواند این کار را انجام دهد؟**

$$5 \times 3 = 15$$



مرحله اول را انتخاب غذا و مرحله دوم را انتخاب سالاد در نظر گرفتیم.

بعد از انتخاب غذا (5حالت) برای هر حالت سه انتخاب سالاد وجود دارد.

مثال: **در مثال قبل اگر مشتری فقط یک غذا و حداکثر یک سالاد سفارش دهد تعداد حالت‌ها را مشخص کنید .**

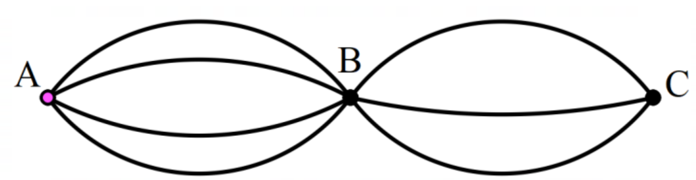
بعد از انتخاب غذا مشتری میتواند سالاد انتخاب نکند و در نتیجه تعداد حالتهای مرحله دوم بیشتر از مثال قبلی و 4 حالت است.

تعداد حالت ها $5 \times 4 = 20$

مثال: شخصی می‌خواهد از A به B و از انجا به C برود و مجددا از C به B و از انجا به A بازگردد ،

الف) به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

ب) اگر در رفت و برگشت از مسیرهای تکراری نرود ، تعداد حالتها را بدست اورید .

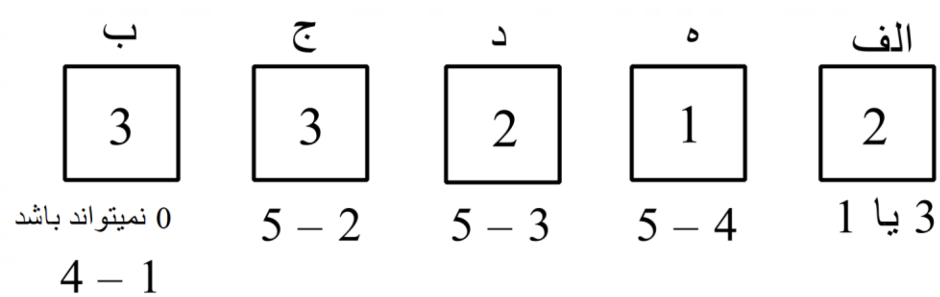


الف) $4 \times 3 \times 3 \times 4 = 144$

ب) $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

مثال: با اعداد 4 و3 و2 و1 و0 چند عدد فرد میتوانیم بسازیم (بدون تکرار)

عدد مورد نظر 5 رقمی است ، بنابراین 5 عمل یکی پس از دیگری باید انجام دهیم:



$$3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 36$$

مثال: با کلمات (ب ، ج ، د ، ر ، س ، ش) :

الف) چند کلمهء سه حرفی بدون تکرار میتوان نوشت ؟

ب) چند کلمهء سه حرفی میتوانیم بنویسیم که دو حرف مجاور تکراری نباشند؟

الف) $6 \times 5 \times 4 = 120$

ب) $6 \times 5 \times 5 = 150$

مثال: مجموعه ی $X = \{1,2,3,4,5,6\}$:

الف) چند زیر مجموعه دارد ؟

ب) چند زیر مجموعه دارد که کوچکترین عضو آن 2 و بزرگترین عضو آن 6 است؟

الف: هر عددی را میتوانیم انتخاب کنیم یا نکنیم ، یعنی برای هر کدام دو روش وجود دارد :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

توضیح : تعدادد زیر مجموعه‌های برابر 2^n است.

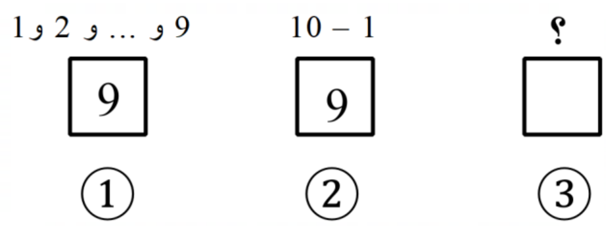
ب:

2	3	4	5	6
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$$

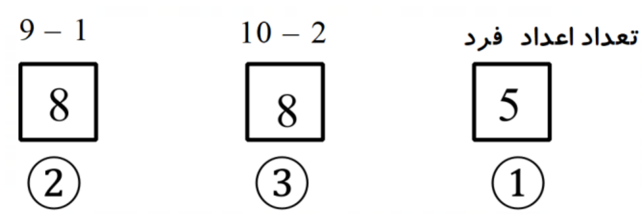
مثال: **تعداد اعداد سه رقمی فرد با ارقام متمایز چقدر است؟**

نکته : ترتیب مراحل را به صورت مناسب باید انتخاب کنیم .



با این انتخاب در مرحلهء سوم از اعداد (9 ، 7 ، 5 ، 3 ، 1) یک یا دو عدد فرد یا هیچکدام در مراحل قبل انتخاب نشده باشد و مشخص نیست برای سومین مرحله چه عددی باید قرار دهیم .

اگر مراحل به صورت زیر باشد :



$$8 \times 8 \times 5 = 320$$

نکته : در انتخاب مراحل از مرحله ای شروع میکنیم که محدودیت بیشتری دارد .

اصل جمع :

اگر کاری را بتوانیم به دو روش انجام داد به طوری که روش اول m انتخاب و روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد.

برای انجام این کار $m+n$ روش وجود دارد .

مثال: پژمان می‌خواهد یک شاخه گل یا یک نوع شیرینی برای دوستش ببرد ، گلها عبارتند از : مریم ، گلایل ، زنبق و رز

شیرینی ها عبارتند از : گردویی ، نارگیلی و کشمشی

حل: برای پژمان دو روش برای انجام کار وجود دارد ، بنابراین از اصل جمع استفاده میکنیم:

کلمه راهنما : یا

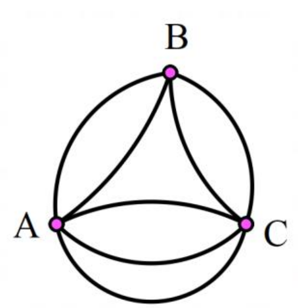
$$4+3=7$$

اگر پژمان بخواهد یک شاخه گل و یک شیرینی ببرد این بار یک کار در دو مرحله انجام میشود، اصل ضرب:

کلمه راهنما : و

$$4\times 3=12$$

مثال: با توجه به شکل مقابل به چند طریق میتوانیم از A به C برسیم؟



میتوانیم مستقیما از A به C برویم یا از A به B و از ازنجا به C برویم

مستقیم از A به C : 3

$$A\to B\to C=2\times 2=4$$

$$3+4=7$$

در مسائلی که نمیتوانیم مستقیما از اصل ضرب استفاده کنیم در صورت امکان به چند کار جدا تقسیم میکنیم و تعداد هر کدام را جداگانه حساب میکنیم و اعداد بدست امده را با هم جمع میکنیم.

مثال: چند عدد زوج چهار رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

چرا نمیتوانیم از اصل ضرب استفاده کنیم؟

الف	د	ج	ب
۵			
۰			۱
۲			۲
۴			...
۶			۹
۸			

ب) اگر یکی از اعداد زوج غیر صفر را انتخاب کرده باشیم (8 انتخاب)

ب) اگر صفر را در الف انتخاب کرده باشیم (9 انتخاب)

مرحله ب نامشخص است:

میتوانیم به دو کار جداگانه تقسیم کنیم:

1) رقم یکان صفر : $\boxed{۱}$ $\boxed{۷}$ $\boxed{۸}$ $\boxed{۹}$

2) رقم یکان (8، 6، 4، 2): $\boxed{۴}$ $\boxed{۷}$ $\boxed{۸}$ $\boxed{۸}$

$$9 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 504 + 1792 = 2296$$

مثال: در چند عدد سه رقمی فقط یک عدد دو وجود دارد؟

مسئله را به سه قسمت مجزا تقسیم میکنیم.

الف) رقم یکان 2 : $9 \times 10 \times 1 = 90$

ب) رقم دهگان 2: $9 \times 1 \times 10 = 90$

ج) رقم صدگان 2: $1 \times 10 \times 10 = 100$

$$100 + 90 + 90 = 280$$

مثال: چند عدد سه رقمی مضرب 5 وجود دارد (بدون تکرار ارقام)

حل : رقم یکان باید صفر یا 5 باشد:

رقم یکان صفر : $9 \times 8 \times 1 = 72$

رقم یکان 5: $8 \times 8 \times 1 = 64$

$$72 + 64 = 136$$

تمرین : مجموعه $\{1,2,3,4\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل عدد 1 باشد و شامل عدد 2 نباشد ؟

تمرین : 5 مداد رنگی را میخواهیم بین سه دانش اموز تقسیم کنیم (می‌توانیم همه آنهارابه یک نفر دهیم).

1) 5^3 2) 3^5 3) 120 4) 20

مثال : 120 چند مقسوم علیه دارد؟

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$(3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

مثال : عدد $2^3 \times 3^4 \times 5^2$ چند مقسوم علیه طبیعی زوج دارد که بر 10 بخش پذیر نیستند؟

1) 12 2) 15 3) 24 4) 30

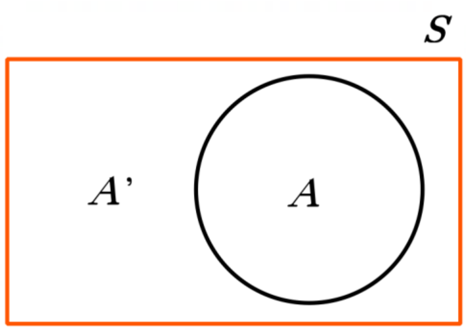
حل : عدد زوج است ، حداقل یک عامل 2 دارد.

توان دو میتواند 1 یا 2 یا 3 باشد و توان 3 میتواند (0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4) و توان 5 (0) باشد.

$$3 \times 5 \times 1 = 15$$

استفاده از اصل متمم

اگر شمردن تعداد اعضای مجموعه A به سادگی میسر نباشد ، ابتدا A' یعنی متمم آن را شمارش میکنیم و از مجموعهء S کم میکنیم .



$$n(A) = n(S) - n(A')$$

توجه : باید مطمئن شویم دوحالت متمم هستند .

مثال: چند عدد سه رقمی داریم که در آنها عدد 3 وجود دارد؟

روش اول :

$$\begin{cases} 3 \quad a \quad b & \rightarrow 1 \times 9 \times 9 \\ a \quad 3 \quad b & \rightarrow 8 \times 1 \times 9 \\ a \quad b \quad 3 & \rightarrow 8 \times 9 \times 1 \\ 3 \quad 3 \quad a & \rightarrow 9 \\ 3 \quad a \quad 3 & \rightarrow 9 \\ a \quad 3 \quad 3 & \rightarrow 8 \\ 3 \quad 3 \quad 3 & \rightarrow 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 81 \\ 72 \\ 72 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \\ 1 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \quad 252$$

$A' =$ اعداد سه رقمی که عدد سه ندارند

روش دوم :

کل اعداد سه رقمی: $\underline{9} \times \underline{10} \times \underline{10} = 900$

اعداد سه رقمی بدون سه : $\underline{8} \times \underline{9} \times \underline{9} = 648$

$$900 - 648 = 252$$

مثال : در چند عدد 4 رقمی ، رقم 5 وجود دارد؟

تعداد اعداد 4 رقمی $\underline{9}\times\underline{10}\times\underline{10}\times\underline{10}=9\times10^3=9000$

اعداد 4 رقمی بدون 5 : $\underline{8}\times\underline{9}\times\underline{9}\times\underline{9}=8\times9^3=5832$

$$9000-5832=3186$$

مثال: چند عدد سه رقمی حداقل بر یکی از اعداد 2 و 3 بخش پذیر نیستند ؟

یادآوری : $A'\cup B'=(A\cap B)'$

متمم : اعدادی که بر 2 و 3 بخش پذیرند(معادل اعدادی که مضرب 6 یا $6k$)

$$100\leq 6k\leq 999$$

$$16/6\leq k\leq 166/6$$

$$17\leq k\leq 166$$

$$n=166-17+1=150$$

تعداد اعداد سه رقمی : $\underline{9}\times\underline{10}\times\underline{10}=900$

تعداد اعداد سه رقمی که بر حداقل یکی از دو عدد 2 و 3 بخش پذیر نیستند : $900-150=750$

دقت کنید : مهم ترین قسمت در حل این تمرین تشخیص متمم عددی که بر حداقل یکی از 2 و 3 بخش پذیر نیستند ، چنین اعدادی بر 6 بخش پذیر نیستند زیرا برای بخش پذیری بر 6 باید هم بر 2 و هم بر 3 بخش پذیر باشد ، و متمم آن اعدادی است که بر 6 بخش پذیر نیستند.

- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)n$

  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

- $0! = 1$

مثال:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1680$$

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680$$

- $1! = 1$

- $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots \times 3 \times 2 \times 1$
- $n! = n(n-1)!$
- $n! = n(n-1)(n-2)!$
- $n! = n(n-1)(n-2)\ldots \times (n-k+1)(n-k)!$

مثال :

$11! = 11 \times 10! = 11 \times 10 \times 9!$

$11! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!$

مثال :

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

- $\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$

فرمول :

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال:

$$P(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!}=336$$

$$P(8,0)=\frac{8!}{(8-0)!}=1$$

$$P(8,8)=\frac{8!}{(8-8)!}=\frac{8!}{0!}=8!$$

فرمول :

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال :

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,(11-3)!} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{3 \times 2 \times 1 \times 8!} = 165$$

مثال : ثابت کنید .

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

مثال:

$$\binom{11}{2} = \binom{11}{9}$$

$$\binom{20}{6} = \binom{20}{14}$$

چند نکته مهم :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{7}{0} = 1 \qquad \binom{6}{6} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ $\qquad \binom{8}{1} = 8 \qquad \binom{11}{10} = 11$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\qquad \binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45 \qquad \binom{20}{18} = \frac{20\times 19}{2} = 190$
- $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ $\qquad \binom{11}{7} + \binom{11}{6} = \binom{12}{7}$

تمرین : برای مسلط شدن به عملیات روی فاکتوریل فرمول بالا را ثابت کنید .

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

مثال :

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$

مثال:

$$\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}=?$$

$$\frac{1}{4\times 3!}+\frac{1}{3!}=\frac{1+4}{4\times 3!}=\frac{5}{4!}$$

مثال : اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26$ باشد ، مقدار n کدام است؟(سراسری 84)

52 (1 **53 (2** **54 (3** **55 (4**

$$\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{4!\,(n-5)!}}=\frac{\overbrace{n!}^{n(n-1)!}\times 4!\times(n-5)!}{\underbrace{(n-4)!}_{(n-4)(n-5)!}\,(n-1)!}=\frac{n\times 4!}{n-4}=26$$

$$24n=26n-4\times 26 \quad\rightarrow\quad 2n=4\times 26 \quad\rightarrow\quad n=52$$

مثال: اگر $C(n,4)=P(n-1,3)$ عدد n کدام است ؟

23 (1 **24 (2** **34 (3** **43 (4**

$$\frac{n!}{4!\,(n-4)!}=\frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$$

$$n(n-1)!=4!\,(n-1)! \qquad \Longrightarrow \qquad n=24$$

تمرین : حاصل $2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 20$ کدام است؟

1) $2 \times 10!$ 2) $\frac{20!}{2^{10}}$ 3) $2^{10} \times 10!$ 4) $\frac{20!}{10!}$

تمرین : حاصل $\frac{8\times12!}{5!} + \frac{12!}{4!}$ کدام است ؟

1) $\frac{13!}{4!}$ 2) $\frac{13!}{2\times4!}$ 3) $\frac{12!}{3!}$ 4) $\frac{13!}{5!}$

تمرین : اگر $(n+3)! = 504$ مقدار $\frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\right)$ کدام است؟

1) 10 2) 20 3) 21 4) 28

تمرین: در چند زیرمجموعه از $\{1,2,3, \ldots 7\}$ حداقل یک عدد اول وجود دارد؟

1) 126 2) 124 3) 120 4) 122

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم به هر حالت چیدن آنها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم

- **تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با : $n!$**
- **تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با : $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$**

تمرین: با حروف کلمهء بلوچستان بدون تکرار حرف :

الف) چند کلمه 8 حرفی (با معنی یا بدون معنی)می‌توان نوشت؟

ب)چند کلمهء 8 حرفی می‌توان نوشت که با (ب) شروه وبه (ن) ختم شود ؟

ج) چند کلمهء 8 حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمه بلوچ کنار هم باشند؟

د) چند کلمه 8 حرفی می‌توان نوشت که شامل بلوچ باشد؟

ه) چند کلمه 6 حرفی میتوان نوشت ؟

و) چند کلمه 6 حرفی شامل (ب) میتوان نوشت؟

جایگشت با اشیاء تکراری

- در صورتی که n شیء داشته باشیم که k شیء آن تکراری باشد ، تعداد جایگشت‌ها $\frac{n!}{k!}$
- اگر n شیء داشته باشیم و دو دسته شیء تکراری که تعداد آنها k_2, k_1 باشد،تعداد جایگشت‌ها $\frac{n!}{k_1!k_2!}$
- در صورتیکه از n شیء متمایز بخواهیم r شیء انتخاب کنیم و اشیاء تکراری داشته باشیم ، با استفاده از اصل جمع حالتهای مشابه را جداگانه محاسبه و با هم جمع می‌کنیم.

مثال: با ارقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$ چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام میتوانیم بسازیم بطوریکه :

الف) ارقام زوج کنار هم باشند.

ب) ارقام زوج کنار هم و ارقام فرد کنار هم باشند.

حل : الف) 6 و 4 و 2 را در مرحله اول یک عدد در نظر میگیریم و در مرحله دوم ، جایگشت سه عدد داخل بسته را در نظر میگیریم:

$4! \times 3!$

۶ و ۴ و ۲   ۵ و ۳ و ۱

ب) $2! \times 3! \times 3!$

۶ و ۴ و ۲   ۵ و ۳ و ۱

مثال : به چند طریق می‌توان اعداد 1 و 2 و 3 و 4 و 5 را کنار هم قرار داد :

الف) هر سه عدد فرد در کنار هم نباشند ؟

ب) هیچ یک از اعداد فرد در کنار هم نباشند؟

حل: الف)در این قسمت ممکن است هیچکدام کنار هم نباشند یا دو تای آنها کنار هم باشند و سومی کنار آنها نباشد، بنابراین متمم اینجا برابر با زمانی است که هر سه کنار هم باشند :

هر سه کنار هم باشند : $3! \times 3! = 36$ ۴ و ۲ ۱ و ۳ و ۵

همه حالات اعداد 5 رقمی : $5! = 120$

هر سه عدد فرد کنار هم نباشند : $120 - 36 = 84$

ب) 

ابتدا درون دایره اعداد فرد و درون مربع‌ها عدد زوج قرار می‌دهیم. $3! \times 2! = 12$

مثال : در جایگشت‌های کلمه $water$ در چند جایگشت a و w در کنار هم قرار ندارند ؟

1) 48 2) 72 3) 120 4) 24

$water \xrightarrow{\text{جایگشت}} 5! = 120$

$wa \quad ter \xrightarrow{\text{کنارهم } a \text{ و } w} 4! \times 2! = 48$

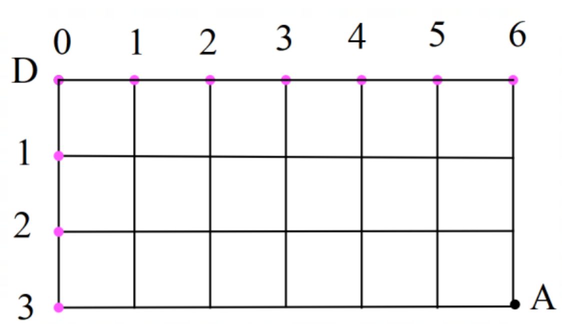
$120 - 48 = 72$ **اصل متمم**

تمرین: تعداد اعداد 4 رقمی که با 4 رقم از 12000 می‌توان نوشت؟

1) 12 2) 8 3) 6 4) 4

مثال: در شکل مقابل از نقطه D به A چند پلکان وجود دارد؟

1) 56 2) 82 3) 84 4) 48



برای رفتن از D به A باید 6 خط افقی و سه خط عمودی را طی کنیم و هر جایگشت دلخواه را می‌توانیم انتخاب کنیم.

$$\frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

مثال: چند عدد سه رقمی با اعداد 3 , 3 , 2 , 2 , 1 , 1 نوشت ؟

1) 24 2) 12 3) 18 4) 30

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1,1,2 & \rightarrow & \frac{3!}{2!}=3 \\ 1,1,3 & & \\ 2,2,1 & & \\ 2,2,3 & & \\ 3,3,1 & & \\ 3,3,2 & & \\ 1,2,3 & \rightarrow & 3!=6 \end{array}\right\} \mathbf{6\times 3}$$

$$18+6=24$$

ترکیب

انتخاب r شیء از n شیء متمایز به شرطیکه ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت نداشته باشد ،(جابجا کردن اشیاء حالت‌های متمایز ایجاد نکند) ترکیب r شیء از n شیء می‌گوییم:

$$\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

توضیح : $\binom{n}{r}\times r!=P(n,r)$

$r!$ تعداد جایگشت هر دسته انتخاب شده است.در مسائل و تستها تشخیص بین جایگشت یا ترکیب اهمیت اصلی دارد .

مثال : **تعیین کنید در موارد زیر از ترکیب باید استفاده شود یا جایگشت ؟**

- ✓ **ساختن کلمات سه حرفی بدون تکرار با استفاده از حروف کلمه فردوسی**
- ✓ **انتخاب 3 کتاب از 90 کتاب**
- ✓ **انتخاب سه دانش آموز از بین 18 دانش آموز برای مسابقات کشوری**
- ✓ **انتخاب سه دانش آموز از بین 10 دانش آموز برای مسابقات یکی برای فیزیک ، یکی برای شیمی و یکی برای ریاضی**

تمرین کتاب درسی : **معلمی قصد دارد برای یک مسابقه 2 نفر از دانش آموزان کلاس انتخاب کند .این دو نفر را به 28 طریق میتواند انتخاب کند . تعداد دانش آموزان را مشخص کنید ؟**

$n =$ **تعداد دانش آموزان**

$$\binom{n}{2} = 28 \qquad \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 28$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 28$$

$$n(n-1) = 56 \quad \rightarrow \quad n = 8$$

تمرین کتاب درسی : یک آشپز ده نوع ادویه دارد با استفاده از هر سه ادویه یک طعم درست میکند ،

چند طعم مختلف می‌تواند درست کند هرگاه :

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد .

ب) دو نوع ادویه هستند که باهم استفاده نمیشوند .

پ) سه ادویه هستند که هر سه نباید با هم استفاده شوند.

ت) ادویه ها به 2 دسته 5تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه-های دسته دوم سازگاری ندارند؟

حل: الف) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\times7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$

ب) $a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ e\ .\ f\ .\ g\ .\ h\ .\ i\ .\ j$

فرض کنیم b و a باهم استفاده شوند :

$$\binom{8}{1} = 8$$

$$120 - 8 = 112$$

پ) $\binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$

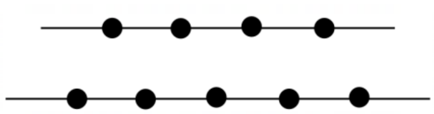
ت) یا از 5 تای اول یا از 5 تای دوم استفاده می‌کنیم : $\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$

مثال: تعداد زیر مجموعه سه عضوی از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل a را بدست آورید .

به جز a دو عضو دیگر باید انتخاب کنیم : $\binom{5}{2} = 10$

مثال: با نقاط مشخص شده چند مثلث می‌توان ساخت؟

1) 100 2) 60 3) 70 4) 80



$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 5 + 10 \times 4 = 70$$

مثال: با حروف کلمه $computer$ چند کلمه 5 حرفی با معنی و بی معنی می‌توان ساخت که در همهٔ آنها حروف u و r به کار رفته باشد؟

1) 360 2) 600 3) 1200 4) 2400

حل: به غیر از u و r سه حرف دیگر باید انتخاب کنیم و بعد از انتخاب جایگشت 5 حرف را بدست می‌آوریم: $\binom{5}{3} \times 5! = 1200$

مثال: از بین 5 دانش آموز تجربی و 3 دانش آموز ریاضی به چند طریق میتوان 3 نفر انتخاب کرد که لااقل دو نفر از آنها تجربی باشند؟

1) 25 2) 30 3) 35 4) 40

یک نفر ریاضی

$$\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{5}{3}$$

دو نفر تجربی یا سه نفر تجربی

مثال:(سراسری تجربی 98) (داخل)

گل فروشی از 8 نوع گل مختلف به چند طریق میتواند دسته گل‌های متمایز درست کند به طوریکه در هر دسته4 یا 5 یا 6 شاخه مختلف موجود باشد؟

1) 126 2) 140 3) 154 4) 168

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$$

$$\frac{8!}{4!\times 4!}+\frac{8!}{5!\times 3!}+\frac{8!}{6!\,2!}$$

$$70+56+28=154$$

مثال:(سراسری تجربی 98) (خارج)

از هر 5 مدرسهء نمونه 4 نفر در اردویی شرکت دارند ، به چند طریق می‌توان از بین آنها 3 نفر انتخاب کرد به طوریکه هیچ دو نفر انتخاب شده از یک مدرسه نباشند؟

1) 135 2) 270 3) 320 4) 640

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=640$$

مرحله اول انتخاب مدرسه و مرحله دوم از هر مدرسه یک نفر

مثال: (سراسری تجربی 99)

به چند طریق می‌توان 5 نفر از 9 دوست صمیمی خود رابه مهمانی دعوت کرد به طوریکه دو آنها نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟ 1) 84 2) 87 3) 91 4) 95

$$\binom{9}{5} - \binom{7}{3} = \frac{9!}{5!\,4!} - \frac{7!}{3!\,4!} = 91$$