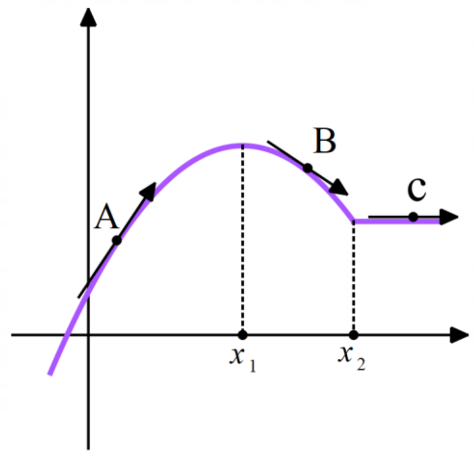
رابطه بین صعودی یا نزولی بودن تابع و شیب خط مماس

در بازه‌ای که تابع مشتق پذیر باشد و شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد تابع اکیداً صعودی است و اگر شیب منفی باشد تابع اکیداً نزولی و اگر در یک بازه شیب مماس صفر باشد تابع ثابت است.



در نمودارمقابل:

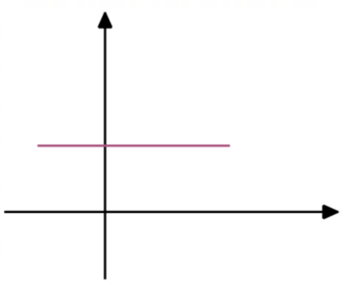
تابع اکیداً صعودی $(-\infty , x_1)$

تابع اکیداً نزولی (x_1 , x_2)

تابع ثابت $(x_2 , +\infty)$

نتیجه: برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع (جهت تغییرات) مشتق تابع را به دست می-آوریم. اگر تابع مشتق پذیر و $f' > 0$ تابع اکیداً صعودی و اگر $f' < 0$ اکیداً نزولی و اگر در بازه $f' = 0$ تابع ثابت است.

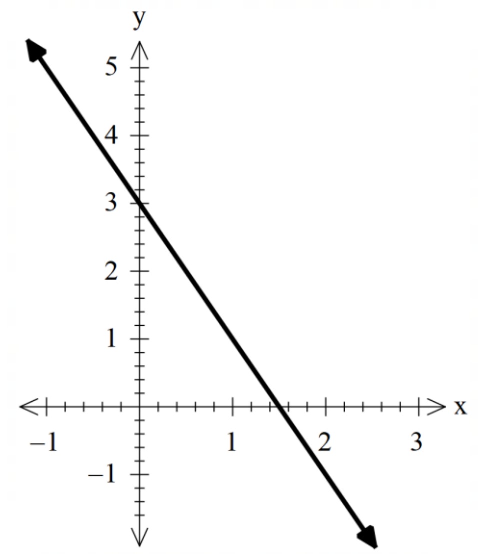
$f(x) = 2 \to f'(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (-\infty , +\infty)$



تابع ثابت

$f(x) = -2x + 3 \rightarrow f'(x) = -2$

تابع اکیداً نزولی



$f(x) = x^3 + 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ **تابع اکیداً صعودی**

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f' $3x^2-3$		+	•	−	•	+	
f (x)	$-\infty$	↗	$+3$	↘	-1	↗	$+\infty$

اکیداً صعودی $(-\infty\,,-1)$ **اکیداً نزولی** $(-1\,,1)$

اکیداً صعودی $(1\,,+\infty)$

نکته مهم: f' (1) و f' (-1) برابر صفر است ولی تابع در این نقاط ثابت نیست.

مشتق تابع باید در یک بازه برابر صفر باشد

آنگاه تابع در این بازه ثابت است

$f(x) = x\,|x-2|$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ -2x + 2 & x < 2 \end{cases}$

$2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ غ ق ق

$-2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$ ق ق

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f' (x)		+	•	-	-2 , 2	+	
f (x)	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$
		اکیداً صعودی $(-\infty\,,1)$		اکیداً نزولی $(1$ و $2)$		اکیداً صعودی $(2\,,+\infty)$	

توابع اکیداً صعودی واکیداً نزولی را تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم و توابع صعودی و نزولی را یکنوا می‌نامیم.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad\qquad$ $D_f = R - \{0\}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

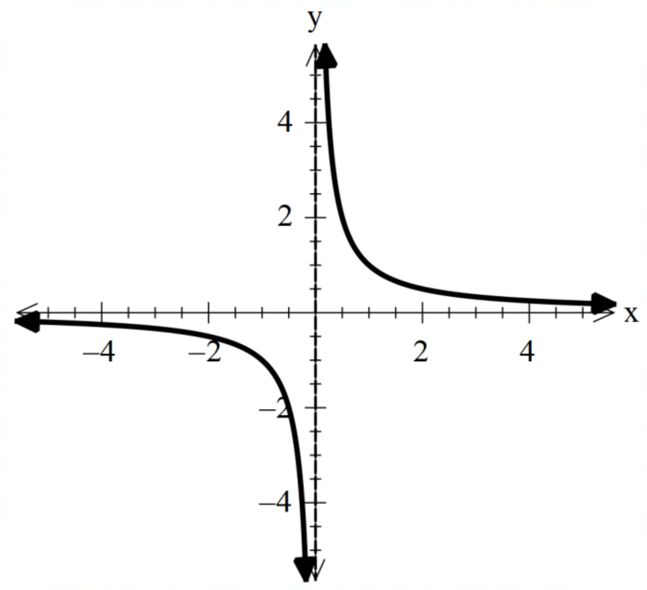
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$		-	||	-	
f (x)	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

دقت کنید تابع در بازه $(-\infty\ ,\ 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0\ ,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

ولی نمی‌توانیم نتیجه گیری کنیم تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است .

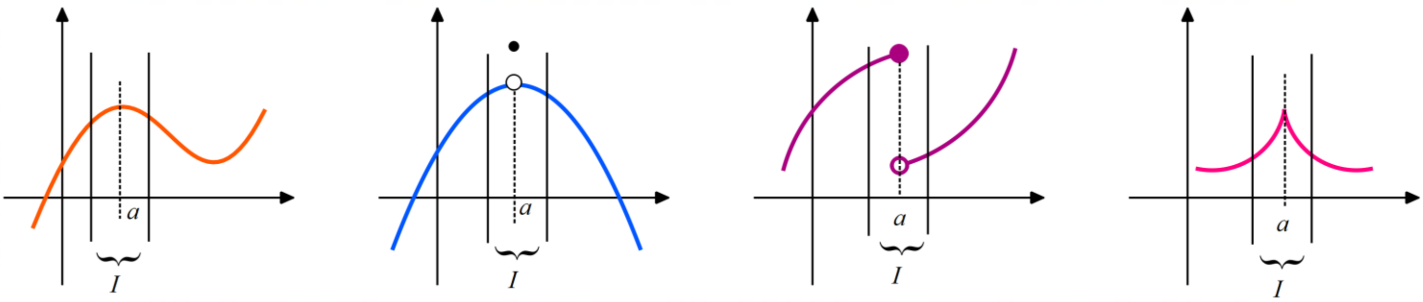
(در $x = 0$ تابع تعریف نشده و مشتق وجود ندارد)

به نمودار توجه کنید:



ماکزیمم نسبی

در نمودارهای زیر :



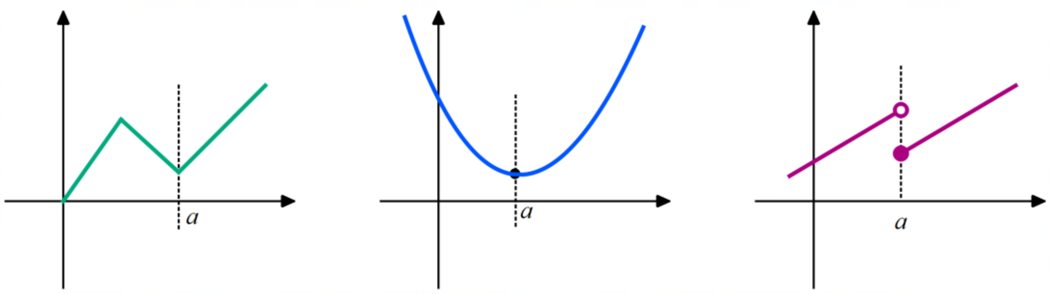
الف) تابع در یک همسایگی a مانند I تعریف شده است.

ب) به ازای هر $x \in I$ داریم $f(a) \geq f(x)$

با توجه به دو ویژگی بالا تابع در نقطه a ، max نسبی دارد.

به طور مشابه اگر تابع در همسایگی a (I) تعریف شده باشد و به ازای هر $x \in I$

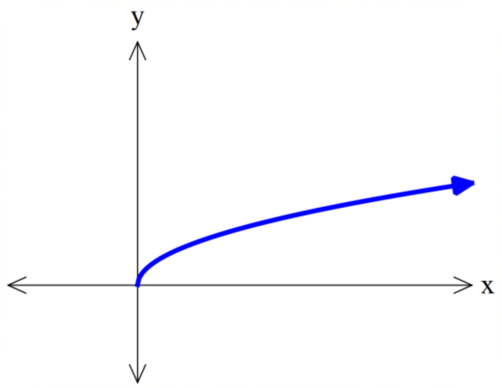
$f(a) \leq f(x)$ باشد آن نقطه min نسبی نامیده می‌شود. مانند :



مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید نقطه مشخص شده max نسبی یا min نسبی دارد.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $g(x)=\sqrt{|x|}$ ج) $h(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{x}$

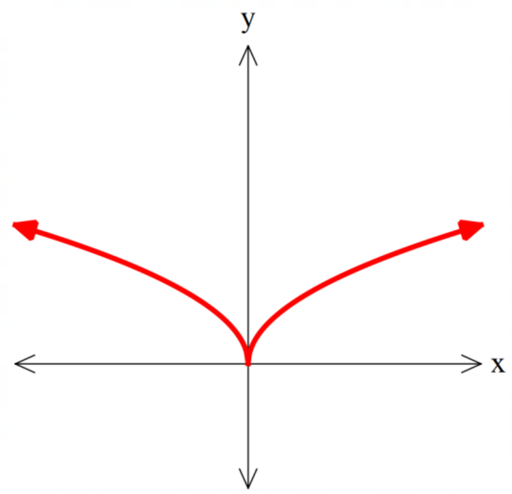
$f(x)=\sqrt{x}$



در x = 0 تابع ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد زیرا تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است.

$g(x)=\sqrt{|x|}$

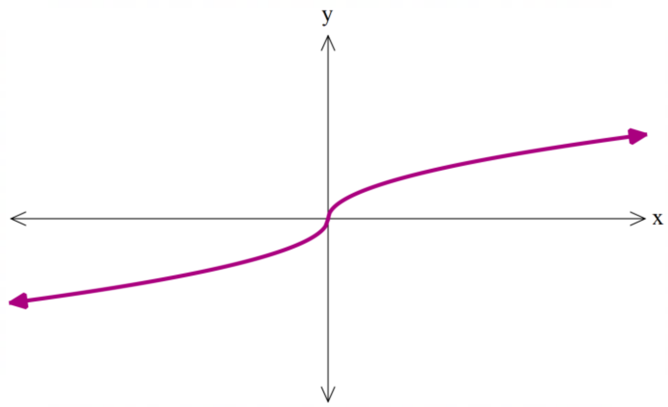
$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$



$x=0$ نقطه min نسبی است.

$$h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

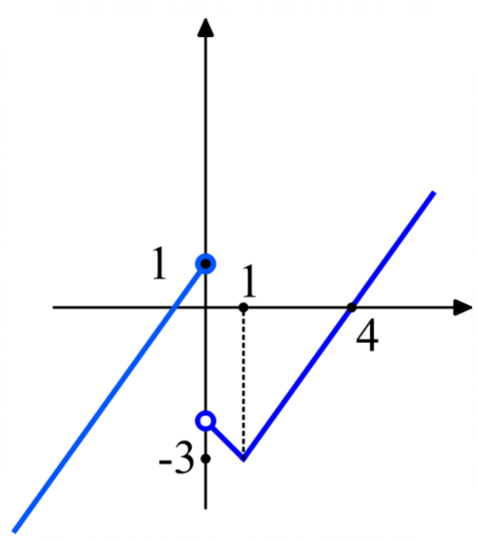
$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>0\\ -\sqrt{-x} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



در نقطه x = 0 تابع max یا min نسبی ندارد (از سمت راستیهاکوچکتر واز سمت چپ بزرگتر است)

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 0\\ |x-1|-3 & x>0\end{cases}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3



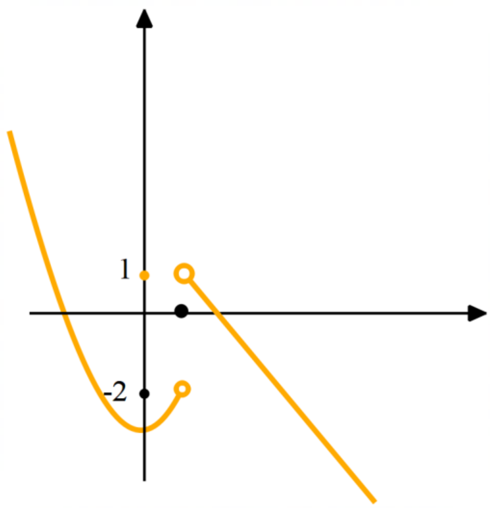
در نقطه به طول x = 0 ← max نسبی

$x=1$ ← Min نسبی

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x<1 \\ a & x=1 \\ 3-2x & x>1 \end{cases}$ **در** x = 1 **،** max **یا** min **نسبی داشته باشد** a

چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد.

1) 2   2) 3   3) 4   4) **بی‌شمار**

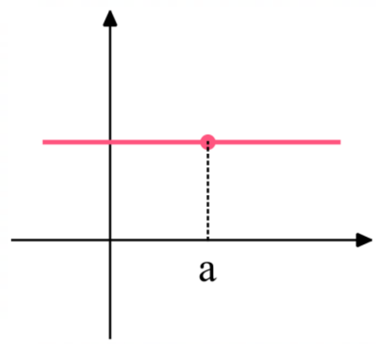


با توجه به نمودار اگر a = 1 **یا** a > 1 **باشد تابع در** x = 1 **ماکزیمم نسبی دارد و** a < -2 **نقطه**

min **نسبی است و اگر** $-2 \le a < 1$ **تابع** max **یا** min **نسبی ندارد.**

a = -2 **یا** a = -1 **یا** a = 0 **را نمی‌پذیرد.**

توضیح: در تابع ثابت در بازه (a , b) **هر نقطه دلخواه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است.**

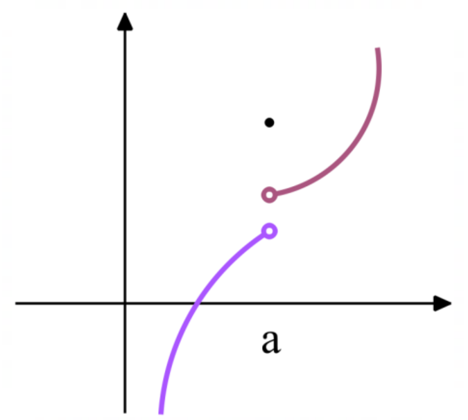


$y = k$

نقطه‌ای به طول a **هم** max **نسبی و هم** min **نسبی است.**

توضیح: در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی ممکن است تابع ناپیوسته باشد.

نقطه‌ای به طول a ماکزیمم نسبی است.



تمرین: توابع زیر را رسم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنها رابه دست آورید.

الف) $f(x) = |x-1| - |x-2|$

ب) $f(x) = \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]$

ج) $g(x) = x + [x]$

د) $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

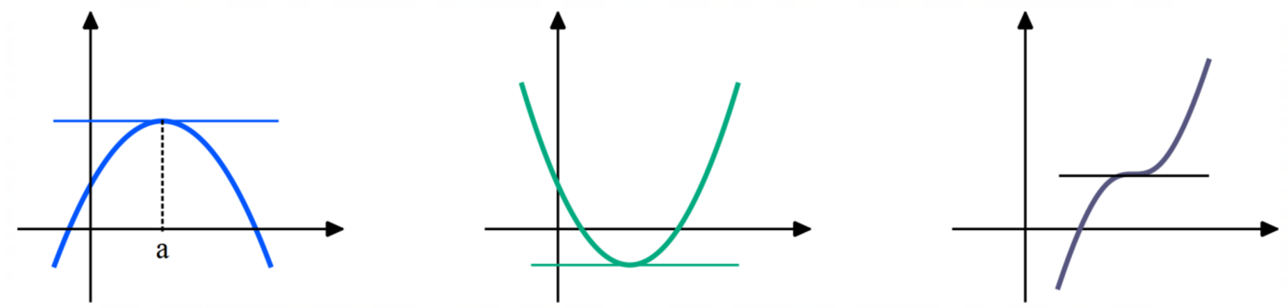
هـ) $k(x) = \sqrt{1-|x|}$

برای تعیین نقاط max و min نسبی می‌توانیم از مشتق تابع استفاده کنیم. برای این کار ابتدا باید نقاط بحرانی تابع را بشناسیم و بتوانیم آنها را مشخص کنیم.

نقاط بحرانی:

نقطه‌ای به مختصات $\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$ را نقطه بحرانی تابع می‌نامیم اگر $f'(a) = 0$ یا $f'(a)$ وجود نداشته باشد (تابع در $x = a$ مشتق پذیر نباشد).

$f'(a) =$ شیب خط مماس $= 0$



الف) مشتق در هر نقطه صفر باشد نقطه بحرانی است.

مثال: نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

1) متساوی الاضلاع

2) فقط متساوی الساقین

3) فقط قائم الزاویه

4) قائم الزاویه و متساوی الساقین

$$f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)x^2$$

$$f'(x) = 2x(x-2)\underbrace{(x-2+x)}_{2x-2}$$

$$f'(x) = 0 \qquad A\left|\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right.$$

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2$$

$$AC = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

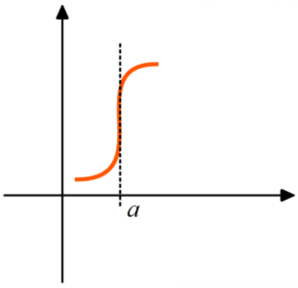
$$BC = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$AC = BC$ متساوی الساقین

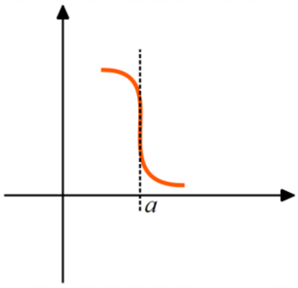
$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ قائم الزاویه

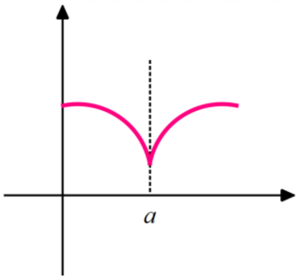
$$2 + 2 = 4 \rightarrow 4 = 4$$



$f'(a^+) = f'(a^-) = +\infty$

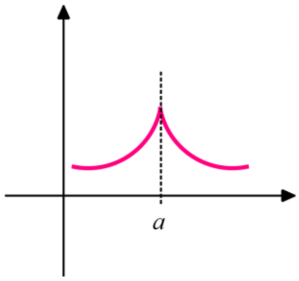


$f'(a^+) = f'(a^-) = -\infty$



$f'(a^+) = +\infty$

$f'(a^-) = -\infty$



$f'(a^+) = -\infty$

$f'(a^-) = +\infty$

ب) صعودی یا نزولی بودن تابع مشخص کننده $\infty +$ یا $-\infty$ است.

اگر مماس بر منحنی در نقطه‌ای موازی عرضها باشد آن نقطه بحرانی است.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ را بدست اورید.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x\,(x-2)}{3\sqrt[3]{x^4\,(x-3)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x\,(x-2)}{3x\sqrt[3]{x\,(x-3)^2}} = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}$$

$$x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 0 \qquad \left|\begin{array}{l} 2 \\ -\sqrt[3]{4} \end{array}\right.$$ **نقطه بحرانی**

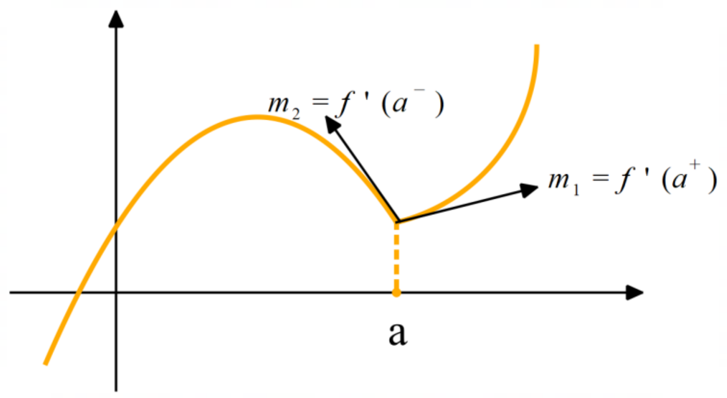
$$\begin{array}{l} f'(0^+) = -\infty \\ f'(0^-) = +\infty \end{array} \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$ **نقطه بحرانی**

$$\begin{array}{l} f'(3^+) = +\infty \\ f'(3^-) = +\infty \end{array} \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$ **نقطه بحرانی**

طول نقاط بحرانی $\{2, 0, 3\}$

توجه: در توابعی که مشتق انها به صورت کسری است، نقاطی که در دامنه قرار داشته باشند و صورت یا مخرج را صفر کنند نقطه بحرانی هستند.

ج)



$f'(a^+) \neq f'(a^-)$

در نقطه‌ای که تابع تعریف شده و پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست برابر نباشند (نقطه گوشه یا زاویه‌دار) نقطه بحرانی است.

مثال: مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $y = |x^2 - 4x|$ کدام است؟

1) $\{2\}$ 2) $\{0, 4\}$ 3) $\{0, 2, 4\}$ 4) $\{2, 4\}$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x & x > 4 \\ -x^2 + 4x & 0 \le x \le 4 \\ x^2 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ -2x + 4 & 0 < x < 4 \\ 2x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

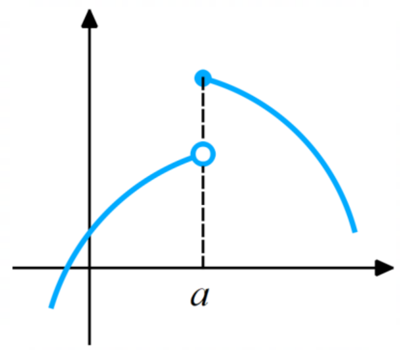
بحرانی $x = 2$ $f'(2) \to -2(2) + 4 = 0$

بحرانی $x = 4$ $f'(4^+) = 4 \to f'(4^-) = -4$

بحرانی $x = 0$ $f'(0^+) = 4 \to f'(0^-) = -4$

طول نقاط بحرانی $\{0, 2, 4\}$

معمولاً ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقطه زاویه دار است.



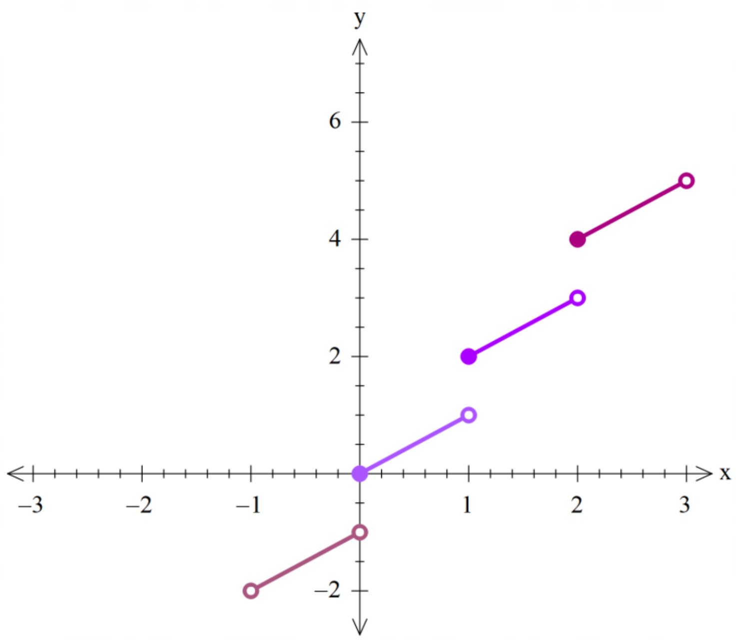
د)

تابع در $x = a$ ناپیوسته است و مشتق ندارد،

در نتیجه $x = a$ طول نقطه بحرانی تابع است.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x + [x]$ در بازه $(-1$ و $3)$ را به دست آورید.

$$y = \begin{cases} x-1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ x+1 & 1 \le x < 2 \\ x+2 & 2 \le x < 3 \end{cases}$$



تابع در

$x = 0$

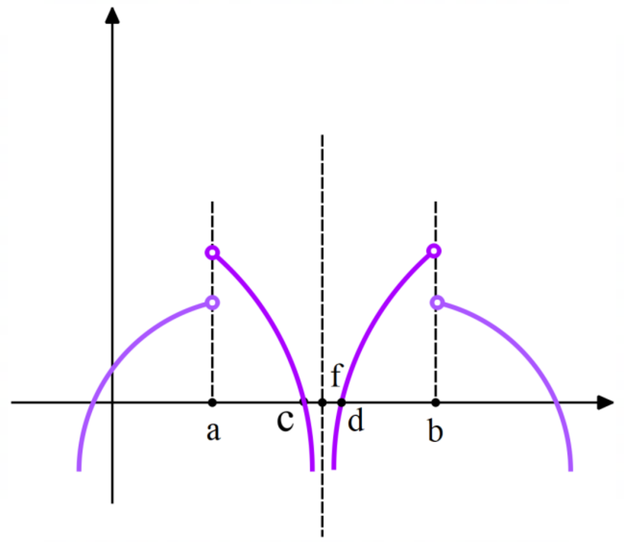
$x = 1$

$x = 2$

ناپیوسته و در نتیجه 3 نقطه بحرانی دارد:

$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$

مثال: اگر نمودار تابع مشتق به صورت زیر باشد تعداد نقاط بحرانی را مشخص کنید.



$D_f = \mathbb{R}$

نقاط به طول f، a , c , d , b بحرانی‌اند.

a , b نقطه زاویه دار و در c , d مشتق صفر است.

$f'_{+} , f'_{-} = -\infty$ یعنی در f مماس موازی محور عرضها است.

نکته: اگر f(x) به حاصلضرب چند عامل تجریه شود : ریشه عاملی که توان زوج دارد نقطه اکسترمم نسبی است.

برای تشخیص max یا min نسبی بودن آن، دو عدد در همسایگی نقطه داده شده در تابع قرار می‌دهیم.(یعنی اگر a طول نقطه ریشه مضاعف باشد، دو نقطه در نزدیکی a $(a-\varepsilon\,, a+\varepsilon)$ در تابع قرار می‌دهیم.)

Min نسبی
$$\begin{matrix} f(a) < f(a+\varepsilon) \\ f(a) < f(a-\varepsilon) \end{matrix} \Rightarrow \Big|_{f(a)}^{a}$$

Max نسبی
$$\begin{matrix} f(a) > f(a+\varepsilon) \\ f(a) > f(a-\varepsilon) \end{matrix} \Rightarrow \Big|_{f(a)}^{a}$$

به جز این دو حالت max یا min نسبی نیست.

مثال: در تابع $f(x) = x^3(x-2)^2(x-3)$

$f(2) = 0$

$f(2/1) < 0 \Rightarrow \Big|_0^2$ نقطه max نسبی

$f(1/9) < 0$

تمرین: تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ در بازه $[\, a\, ,\, b\,]$ صعودی است حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

1) $\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{5}$ 4) $2\sqrt{5}$

تمرین: مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^2-28)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

1) $\{-2\, ,\, 2\}$ 2) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{7}\}$

3) $\{-2\, ,\, 0\, ,\, 2\}$ 4) $\{-7\, ,\, 0\, ,\, 1\}$

تمرین: تابع $f(x) = \frac{a}{x} + bx$ در نقطه (2– و 1) اکسترمم نسبی دارد مقدار a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

1) $max\, , \frac{4}{3}$ 2) $max\, , -\frac{4}{3}$ 3) $min\, , \frac{4}{3}$ 4) $min\, , -\frac{4}{3}$

تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی به کمک مشتق

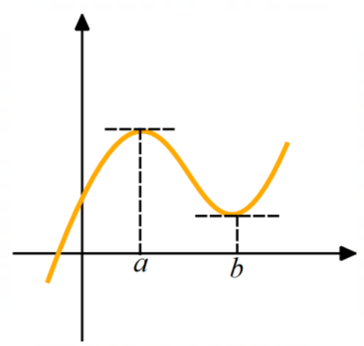
قضیه فرما:

اگر تابع f در نقطه‌ای به طول C ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد (اکسترمم نسبی) و تابع در آن نقطه مشتق پذیر باشد یعنی $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c) = 0$

نتیجه مهم: هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است.

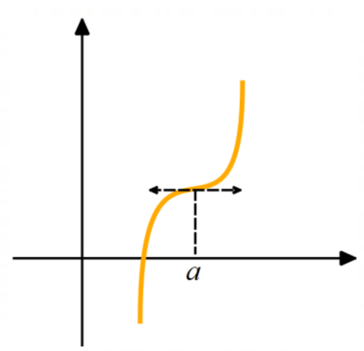
توضیح: عکس این قضیه همواره صحیح نیست یعنی ممکن است نقطه‌ای بحرانی باشد ولی اکسترمم نسبی نباشد.

برای درک بهتر قضیه به مثالهای زیر توجه کنید.



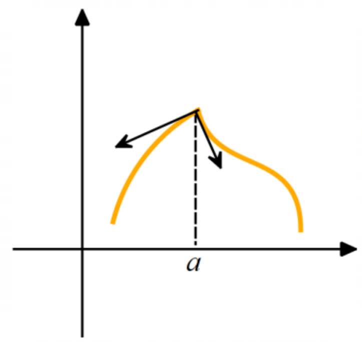
max نسبی $\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$ $f'(a) = 0$

min نسبی $\left| \begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix} \right.$ $f'(b) = 0$



$f'(a) = 0$

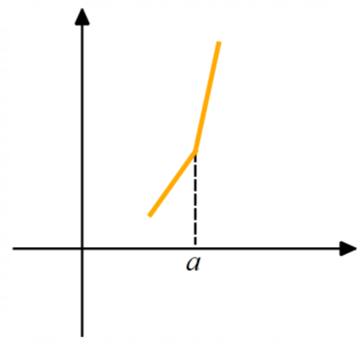
Max یا min نسبی نیست $\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$



$f'(a^+) \neq f'(a^-)$

$f'(a)$ وجود ندارد $\rightarrow \left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$ نقطه بحرانی

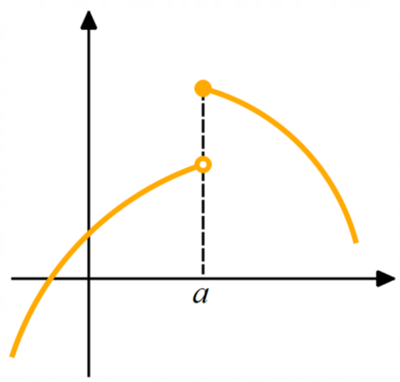
$\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right. \rightarrow$ Max نسبی



$f'(a^+) \neq f(a^-)$

$\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$ نقطه بحرانی

$\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$ اکسترمم نسبی نیست



تابع در a ناپیوسته , نقطه a بحرانی

$f'(a)$ وجود ندارد

$\left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$ max نسبی است

آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترمم نسبی

اگر C طول نقطه بحرانی و f در C پیوسته و در همسایگی محذوف C مشتق پذیر باشد مشتق تابع را تعیین علامت **می‌کنیم.**

x		C	
f'	− ↘	f (c) min	+ ↗

توضیح: فقط در حالتی که مشتق در همسایگی c تغییر علامت دهد تابع max یا min نسبی دارد.

x		C	
f'	+ ↗	f(c) max	− ↘

x		C	
f'	+ ↗	f (c) max یا min نسبی نیست	+ ↗

مثال: در تابع $f(x)=x|x-4|$ فاصله دو نقطه ماکزیمم و مینیمم نسبی کدام است؟

(سراسری98)

1) $\sqrt{5}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{5}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x & x\geq 4\\ -x^2+4x & x<4\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>4\\ -2x+4 & x<4\end{cases}$$

$-2x+4=0 \ \to x=2\ <4$ ق ق $\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ **بحرانی**

$\begin{matrix}f'(4^+)=-4\\ f\ (4^-)=4\end{matrix} \ \to \left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$ **بحرانی**

X	$-\infty$		2		4		$+\infty$
F'(x)		+		- -4		$+4$ +	
F(x)	$-\infty$	↗	4 Max نسبی	↘	0 Min نسبی	↗	$+\infty$

$\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$ $\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

توضیح: **برای حل تستی و سریع**

$y=x|x-4|$ **ریشه ساده قدرمطلق**   x = 4   **طول نقطه بحرانی**

$x^2-4x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x-4 \to x=2$ **طول نقطه بحرانی**

تابع پیوسته بنابراین یکی از دو نقطه max نسبی و یکی از آنها min نسبی است.

$\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$ $AB=2\sqrt{5}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ فاصله دو نقطه ماکزیمم ومینیمم نسبی کدام است؟

1) $2\sqrt{2}$ 2) 3 3) $3\sqrt{2}$ 4) 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(1) = 0$$

$$f'(-1) = 0$$

دقت کنید تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است، $f'_{(0^-)} = f'_{(0^+)} = -2$

در نتیجه $x = 0$ بحرانی نیست

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+ $\nearrow$		− $\searrow$		+ $\nearrow$	
			1		-1		

$A\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ $AB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-1)^2}$

$$AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

تمرین در کلاس : طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

تمرین: نقطه ماکزیمم نسبی $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ درکدام ناحیه مختصاتی قرار دارد؟

1) اول 2) دوم 3) سوم 4) چهارم

ماکزیمم و مینیمم مطلق:

بالاترین نقطه یک تابع را ماکزیمم مطلق و پایین ترین آن را مینیمم مطلق می‌گوییم.

تعریف ریاضی ماکزیمم مطلق

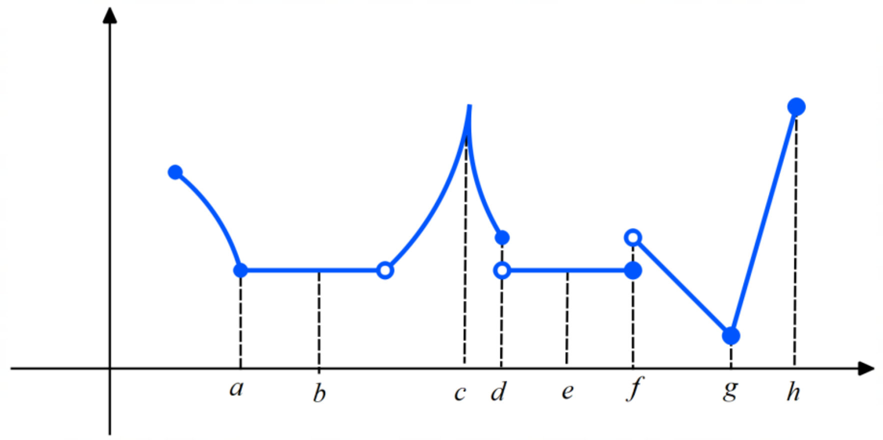
$C \in D_f \qquad \forall x \in D_f \qquad f(c) \geq f(x)$

تعریف ریاضی مینیمم مطلق

$C \in D_f \qquad \forall x \in D_f \qquad f(c) \leq f(x)$

ماکزیمم و مینیمم مطلق میتواند شامل نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه و نقاط ناپیوستگی و نقاطی که تابع در همسایگی آن تعریف نشده است باشد.

مثال: با توجه به نمودار زیر مشخص کنید کدام نقاط (ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق، مینیمم نسبی، مینیمم مطلق، بحرانی) می‌باشند.



x = a	**نقطه بحرانی**	**مینیمم نسبی**
x = b	**نقطه بحرانی**	**ماکزیمم و مینیمم نسبی**
x = c	**نقطه بحرانی**	**ماکزیمم نسبی**
x = d	**نقطه بحرانی**	–
x = e	**نقطه بحرانی**	**ماکزیمم و مینیمم نسبی**
x = f	**نقطه بحرانی**	**مینیمم نسبی**
x = g	**نقطه بحرانی**	**مینیمم نسبی و مینیمم مطلق**
x = h	_	**ماکزیمم مطلق**

مثال: مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ را به دست آورید.

$D_f \quad : \quad 4 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$

$f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$\sqrt{4 - x^2} - x = 0 \qquad 4 - x^2 = x^2$

$2x^2 = 4 \Longrightarrow x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

توجه: در حل معادلات رادیکالی جوابها را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

$x = \sqrt{2} \Longrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0$

$x = -\sqrt{2}$ و $\sqrt{4 - x^2} - x \neq 0$ غ ق ق

$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ ابتدا و انتهای دامنه $\left| \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right.$ $\left| \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \right.$

$x = \sqrt{2}$ بحرانی $\left| \begin{matrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{matrix} \right.$

مطلق $\min = -2$ مطلق $\max = 2\sqrt{2}$

مثال : ماکزمم و مینیمم مطلق $f(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه [1 و 2-] به دست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2$ مشتق جواب ندارد

مطلق Min $x = -2 \rightarrow (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -17$

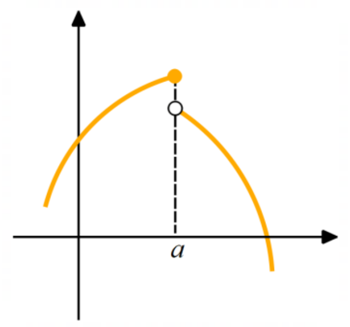
مطلق Max $x = 1 \rightarrow (1)^3 + 2(1) - 5 = -2$

مثال: اگر C نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه C کدام وضعیت را دارد؟

1- پیوسته   2- مشتق پذیر   3- خط مماس افقی   4- اکسترمم نسبی

نمودار مقابل نشان می‌دهد تابع در a ناپیوسته و مشتق ناپذیرند.

خط مماس ندارد ولی اکسترمم نسبی است.



مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{9}$ 2) $-\frac{1}{6}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) 0

$$x^3 \geq x^3 - x^2$$
$$\sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$
$$x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq 0$$

کمترین مقدار برابر صفر است.

چند نکته مهم:

اگر تابع در [a , b] پیوسته باشد ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

دربازه (a , b) بعد از محاسبه نقاط بحرانی به جای $f(b), f(a)$ ، $\lim_{x\to a^+} f(x)$

و$\lim_{x\to b^-} f(x)$ را به دست می‌آوریم اگر بیشترین یا کمترین مقدار مربوط به نقاط حدی باشد

در این صورت ماکزیمم یا مینیمم مطلق ندارد.

اگر تابع در بازه مورد نظر پیوسته نباشد آن را در صورت امکان به چند بازه پیوسته تقسیم و

جداگانه بررسی می‌کنیم.

مثال:تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه [-1 و 2] بررسی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را در این بازه

مشخص کنید.

$D_f = [-1\ ,2] - \{0\}$

$[-1\ ,0) \cup (0\ ,2]$

تابع نقطه بحرانی ندارد $\qquad x = 0 \notin D_f \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

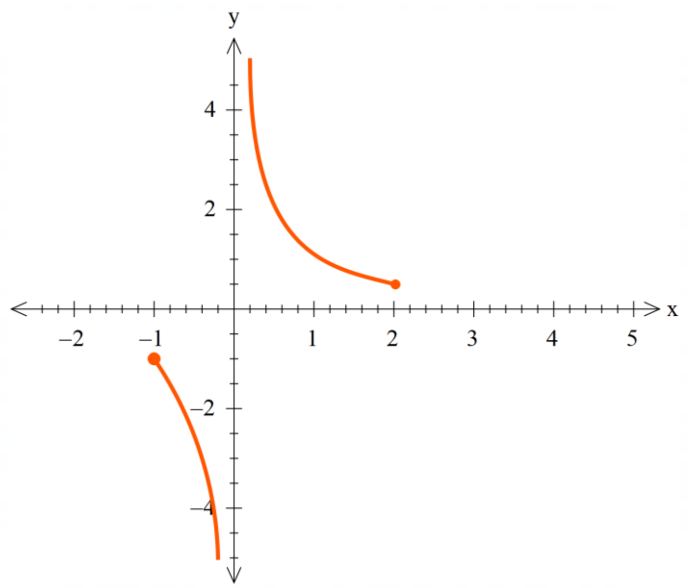
$[-1\ ,0)$

$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ f(2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

تابع max و min مطلق ندارد

نمودار تابع در بازه داده شده به صورت زیر است و دیده می‌شود تابع ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.



مثال: **بیشترین و کمترین مقدار تابع** $f(x) = x^2 - 4|x - 1|$ **را در بازه** $[-4$ **و** $1]$ **مشخص کنید.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & x \geq 1 \\ x^2 + 4x - 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 1 \\ 2x + 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -2$$
$$f'_-(1) = 6$$

$x = 1$ **بحرانی**

$2x - 4 = 0 \qquad x = 2$ **در دامنه نیست**

$2x + 4 = 0 \qquad x = -2$ **بحرانی**

$$\left.\begin{array}{r} x = -4 \rightarrow y = -4 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{array}\right\}$$ **ابتدا و انتهای دامنه**

$$x = -2 \rightarrow y = -8\}$$ **نقطه بحرانی**

ماکزیمم مطلق = 1 **مینیمم مطلق** = -8

بهینه سازی:

در اغلب مسائل مربوط به بهینه سازی هدف به دست آوردن ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع هدف است.

برای حل مسائل بهینه سازی معمولاً باید مراحل زیر انجام شود.

1- مشخص کردن تابع هدف (تابعی که ماکزیمم یا مینیمم آن را باید به دست آوریم).

2- تابع هدف را بر حسب یک یا چند متغیر ایجاد می‌کنیم.

3- با توجه به محدودیتهای مسئله تابع را یک متغیره می‌کنیم.

4- دامنه تابع ایجاد شده را با توجه به محدودیتهای مسئله مشخص می‌کنیم.

5- نقاط بحرانی و ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را به دست می‌آوریم.

مثال: اگر مجموع دو عدد مثبت برابر 18 باشد ماکزیمم حاصلضرب دو عدد را به دست آورید. تابع هدف حاصلضرب دو عدد:

$x\,, y\ > 0 \qquad x + y = 18$

تابع هدف $\quad P = xy$

$y = 18 - x \qquad P = x(18 - x) = 18x - x^2$

$D_p \quad 0 < x < 18 \qquad P' = 18 - 2x = 0 \rightarrow x = 9$ نقطه بحرانی

$x = 9\ \rightarrow p = 9 \times 9 = 81$ بیشترین مقدار

$x \rightarrow 0 \qquad p \rightarrow 0$

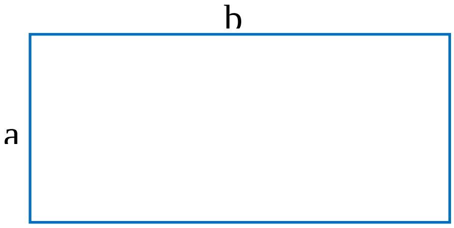
$x \rightarrow 18 \qquad p \rightarrow 0$

بیشترین مقدار وقتی است که $x = y = 9$ باشد.

نکته: اگر مجموع مقدار ثابتی باشد ، حاصلضرب وقتی max است که دو عدد با هم برابر باشند.

توضیح: هرچه دو عدد بهم نزدیک‌تر باشند حاصلضرب بزرگتر است.

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی را به دست آورید که محیط آنها برابر 22 باشد.



$$2a + 2b = 22$$

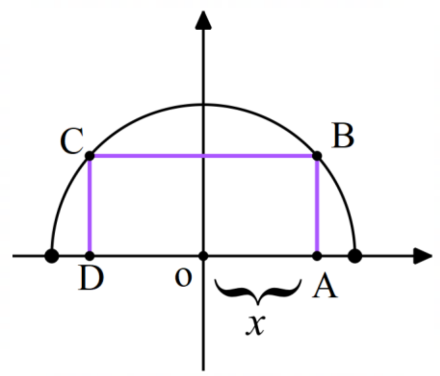
$$a + b = 11$$

$$\max(a \times b) = \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{4}$$ (مساحت مستطیل)

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع 6 و دو رأس دیگر آن

روی نیم دایره باشد کدام است؟

1) 18   2) 24   3) 27   4) 36



$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$y^2 = 36 - x^2$$

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S_{ABCD} = AD \times AB$$

$$S = 2x\sqrt{36 - x^2} \qquad 0 < x < 6$$

$$s' = 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{2x \times -2x}{2\sqrt{36 - x^2}}$$

$$s' = \frac{2(36 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$72 - 4x^2 = 0 \qquad x^2 = 18 \qquad x = 3\sqrt{2}$$

$$\max s = 2 \times 3\sqrt{2}\,\sqrt{36 - 18} = 36$$

راه حل مثلثاتی:

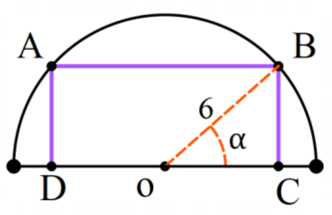
$CO = 6 \times \cos \propto \Longrightarrow CD = 12 \cos \propto$

$BC = 6 \times \sin \propto$

$S = 6 \sin \propto \times 12 \cos \propto$

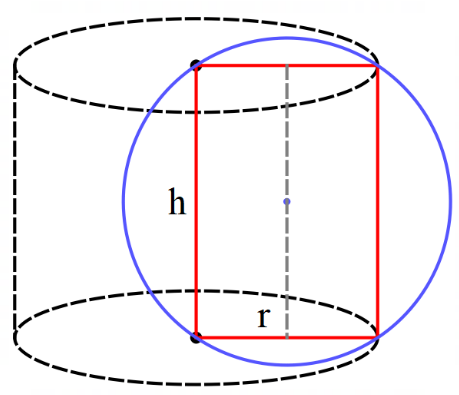
$S = 72 \times \frac{1}{2} \sin 2 \propto$

$\max \sin 2 \propto = 1 \Longrightarrow \max S = 36$



مثال : مستطیل محاط در دایره به قطر 6 واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه-های قائم ایجاد شود وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد ارتفاع آن کدام است؟

1) 4   2) $2\sqrt{3}$ 3) $2\sqrt{6}$ 4) $3\sqrt{2}$



$V = \pi r^2 h \quad 0 < h < 6$

$36 = r^2 + h^2$

$r^2 = 36 - h^2$

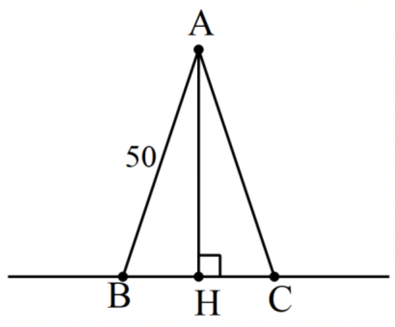
$v = \pi(36 - h^2)h$

$v = \pi(36h - h^3)$

$v' = \pi(36 - 3h^2)$

$36 - 3h^2 = 0 \Longrightarrow h^2 = 12 \Longrightarrow h = 2\sqrt{3}$

تمرین کتاب درسی: می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه 100 مترنرده را داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود.



$AH = h \qquad l^2 + h^2 = 2500$

$Hc = l \qquad S = \frac{2l \times h}{2} = l \times h$

$S = l \times \sqrt{2500 - l^2}$

$S' = \sqrt{2500 - l^2} + \frac{-2l}{2\sqrt{2500 - l^2}} \times l$

$l^2 = \frac{2500}{2}$

$S' = \frac{2500 - l^2 - l^2}{\sqrt{2500 - l^2}} = 0$

$l = \frac{50}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}$

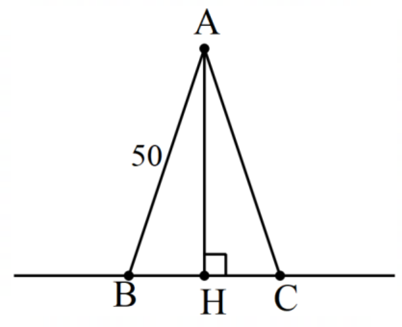
$l^2 + h^2 = 2500$

$1250 + h^2 = 2500$

$h^2 = 1250 \qquad h = 25\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2} \times 2l \times h = l \times h = 25\sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 1250$

روش مثلثاتی



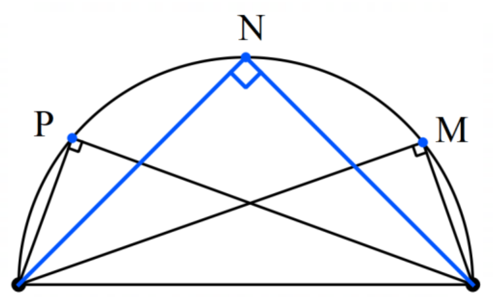
$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

$$S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times sinA$$

$$S_{max} = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times 1 = 1250$$

نکته: اگر مجموع مربعات دو عدد مقدار ثابتی باشد ، حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که دو عدد برابر باشند.

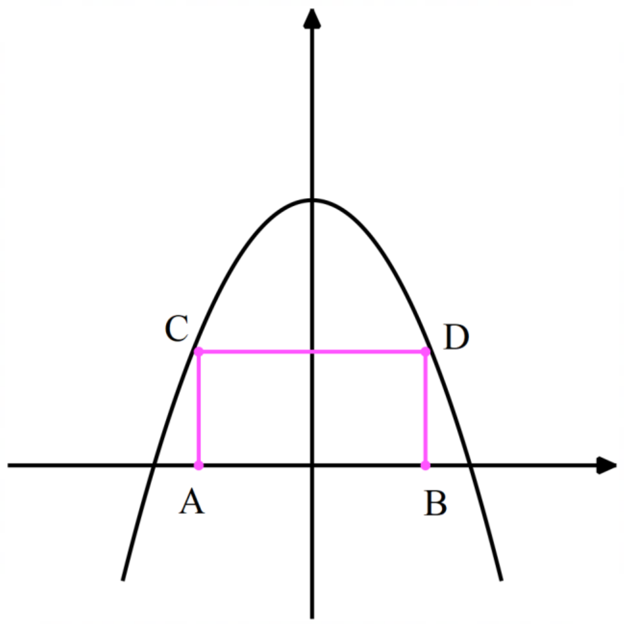
تعبیر هندسی: اگر نقطه متحرکی روی نیم دایره در نظر بگیریم ماکزیمم مساحت مربوط به مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است.



$$h^2 + l^2 = 2500 \Rightarrow h^2 = 1250$$

$$l^2 = 1250$$

تمرین کتاب درسی :ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



$$S = \frac{2x \times (12 - x^2)}{2}$$

$$S = 12x - x^3$$

$$S' = 12 - 3x^2$$

$$x^2 = 4 \qquad x = 2$$

$$2x = 4 = AB$$

$$12 - x^2 = 8 = AC$$