تعریف مشتق:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

تغییرات تابع به تغییرات متغیر وقتی تغییرات متغیر به سمت صفر میل کند را مشتق تابع می‌گوییم.

- ✓ **از هر دو حد بالا برای محاسبه مشتق می‌توانیم استفاده کنیم .**
- ✓ **در صورتی تابع در x = a مشتق دارد که حدهای بالا موجود و متناهی باشد.**
- ✓ **اگر جواب حدهای بالا بینهایت شود و یا حد چپ و راست برابر نباشد و یا عدد معینی نباشند مشتق وجود ندارد. اگر تابع در a پیوسته نباشد مشتق ندارد.**

مثال: مشتق $f(x)=(x^2-1)\cos\pi x$ را در x = 1 به دست آورید.

$$f(1)=(1^2-1)\cos\pi=0$$

نکته: اگر در تابع f عامل صفر به ازای a داشته باشیم بهتر است ازتعریف مقابل استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \qquad f(1)=(1^2-1)\cos\pi=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\cos\pi x-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\cos\pi x}{x-1}=-2=f'(1)$$

مثال: مشتق $f(x) = (x-1)[x]$ را در $x = 1$ به دست آورید.

$$f(1) = (1-1)[1] = 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[x]-0}{(x-1)} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+}[x] = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}[x] = 0$$

تابع مشتق در $x = 1$ حد ندارد و مشتق

مثال: مشتق $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ را در $x = 1$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{|x-1|}-0}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{|x-1|}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\times\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

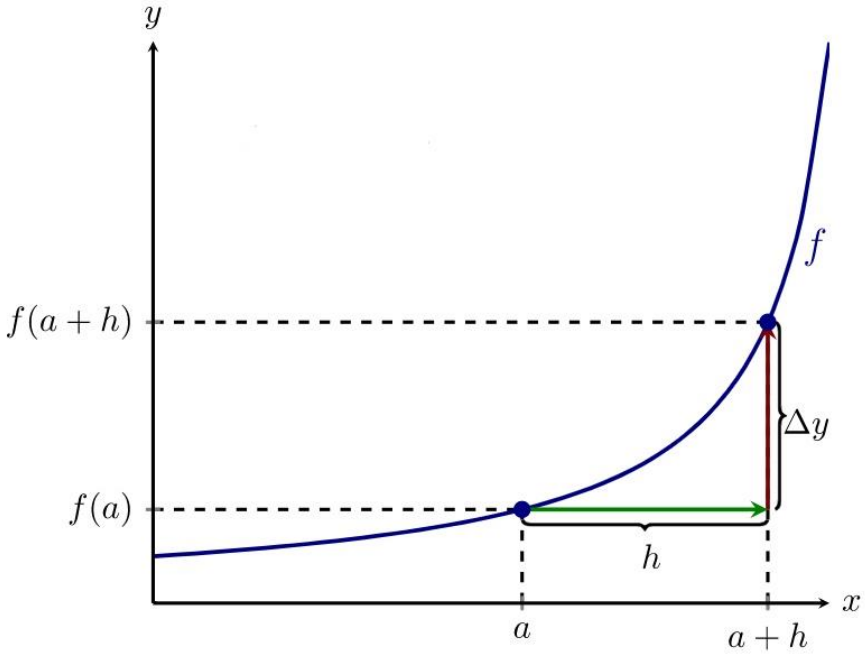
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{|x-1|}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}\times\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مشتق تابع دراین نقطه وجود ندارد.

تعبیر هندسی مشتق



$$\Delta y = f(a+h) - f(a)$$

$$m = tg \propto = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

با توجه به نمودار تغییرات تابع به تغییرات متغیر، شیب خطی است که منحنی $y = f(x)$ **را در دو نقطه متمایز قطع کند و اگر** h **(فاصله طول دو نقطه) به صفر نزدیک شود شیب خط مماس برابر مشتق تابع در آن نقطه است.**

مشتق تابع در $x = x_0$ یعنی $f'(x_0)$ شیب خط مماس بر منحنی را مشخص می‌کند.

مشتق راست و چپ

$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق راست تابع در $x = a$ می‌نامیم.

$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق چپ در $x = a$ می‌نامیم.

مشتق راست شیب نیم مماس راست و مشتق چپ شیب نیم مماس چپ را مشخص می‌کند.

تابعی در $x = a$ مشتق پذیر می‌گوئیم که $f'_+(a) = f'_-(a)$ باشد.

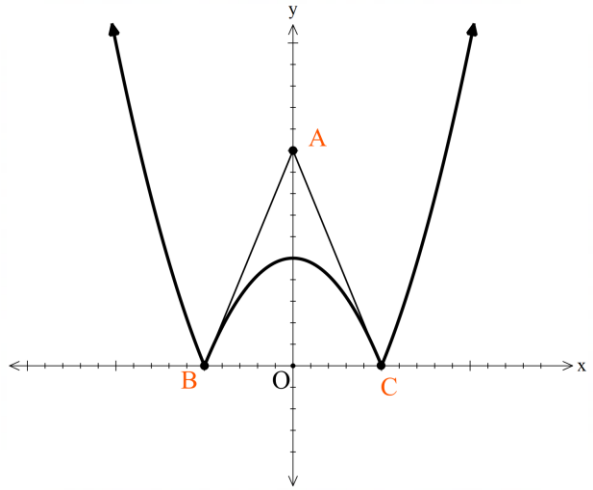
مثال: در تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ مشتق چپ و راست را در $x = 0$ به دست آورید.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{2}} \begin{cases} x \to 0^+ & \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = f'_+(0) \\ x \to 0^- & \frac{-x}{x\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = f'_-(0) \end{cases}$$

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ مساحت ABC کدام است؟ (AB و AC مماس بر منحنی در نقطه B و C هستند)



$$|x^2 - 1| = 0 \quad x = \pm 1 \begin{cases} C\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \end{cases}$$

شیب نیم مماس چپ $= f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x^2-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$

$C\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad m = -2 \qquad y = -2(x-1)$ یا $y = -2x + 2$

معادله خط AC (نیم مماس چپ در نقطه C)

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = 2$$

$B\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \qquad m = 2 \qquad y - 0 = 2(x+1) \to y = 2x + 2$

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \to \left|\begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} BC = 2 \\ AD = 2 \end{matrix}$$

$$S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

نکته:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{kh} = \frac{m}{k} f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'(a)$$

مثال: حاصل هریک از حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^2(2+\Delta x)-f^2(2)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\times\underbrace{f(2+\Delta x)+f(2)}_{2f(2)}$$

$$=2f(2)f'(2)$$

ب) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h^2+h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h}=-3f'(a)$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0+\dfrac{2}{n}\right)-f(x_0)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{2}{n}\right)-f(x_0)}{\dfrac{1}{n}}$

$\underset{n\to\infty}{\dfrac{1}{n}}=\underset{h\to 0}{h}$ $\qquad\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$

د) $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(3)-f(3-a^2)}{a^2}=+f'(3^-)$

توضیح قسمت د : متغیر a^2 جای h نشسته است و عدد 3 مشخص کنندهء طول نقطه مشتق گیری است با توجه به فرمول

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(x_0)$$

در این قسمت m = 0 و n = -1 و k = 1 است $3-a^2<3$ در نتیجه هدف مشتق چپ تابع است.

$$\lim_{a\to 0^-}\frac{f(3)-f(3-a^2)}{a^2}=\frac{0-(-1)}{1}f'(3^-)=f'(3^-)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^3(x)-f^3(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\left(f^2(x)+f(x)\times f(2)+f^2(2)\right)$$
$$=f'(2)\times\left(3f^2(2)\right)$$

مثال: اگر f در x_0 مشتق پذیر $\lim_{h\to 0^+}\frac{(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-2$ مقدار $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0-h)}{h}$ کدام است؟ (سراسری تجربی 80)

1) $2-f(x_0)$ 2) $2+f(x_0)$ 3) 2 4) -2

تعریف مشتق راست $\lim_{h\to 0^+}\frac{(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0^+)$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0^+)=-2$$

با توجه به فرمول $\frac{m-n}{k}$ و چون $h\to 0^-$ ، $x_0-h>x_0$ این نقطه مشتق راست تابع را مشخص می‌کند.

اگر تابع در $x=a$ مشتق پذیر باشد در نقطه $x=a$ پیوسته است.

اگر تابع در $x=a$ پیوسته نباشد در نقطه $x=a$ مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x)=x+[x]$ در $x=1$ ناپیوسته است و مشتق پذیر نیست.

تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ در $x=1$ ناپیوسته است و مشتق پذیر نیست.

تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geq 1\\ 4x & x<1\end{cases}$ در $x=1$ ناپیوسته است و مشتق پذیر نیست.

ممکن است تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد.

مثال: $f(x) = |x-2|$ در $x = 2$ پیوسته است ولی

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|-0}{x-2}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2} = 1 = f'_+(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1 = f'_-(2)\end{cases}$$

تابع در $x = 2$ **مشتق پذیر نیست.**

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = (x-2)[x]$ **را در** $x = 2$ **بررسی کنید.**

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)[x] = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)[x] = \lim_{x\to 2^-}(x-2)\times x = 0 \qquad f(2) = (2-2)[2] = 0$$

تابع در $x = 2$ **پیوسته است**

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)[x]-0}{x-2} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)\times 2}{x-2} = 2 = f'_+(2)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-2)\times 1}{x-2} = 1 = f'_-(2)\end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست $f'_+(2) \neq f'_-(2)$

اگر تابع در $x = a$ از راست ناپیوسته باشد مشتق راست ندارد.

اگر تابع در $x = a$ از چپ ناپیوسته باشد مشتق چپ ندارد.

مثال: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$ مشتق پذیری از راست و چپ در $x = 1$ و مشتق پذیری تابع در $x = 1$ را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 1) = 0 \qquad f(1) = 1^3 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

تابع پیوستگی چپ ندارد و در $x = 1$ مشتق چپ ندارد.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3 = f'_+(1)$$

تابع مشتق راست دارد ولی در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق چپ تابع $f(x) = x^2[x]$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟ (سراسری تجربی 76)

1) 0 2) 3 3) 6 4) 12

$$f(3) = 3^2[3] = 27$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2[x] = \lim_{x \to 3^-} 2x^2 = 18$$

تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد در نتیجه مشتق پذیر نیست.

جواب صحیح در گزینه ها نیست.

توضیح: در آن سال این تست حذف شده

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = |x|[x]$ مقدار $f'(0^-) - f'(0^+)$ کدام است؟

(سراسری 87)

1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

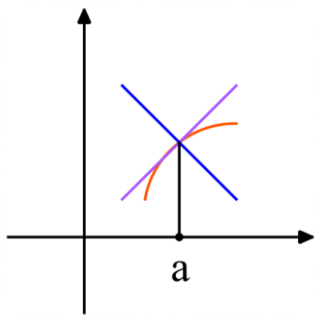
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|[x] - 0}{x} = \frac{0}{x} = 0 = f'_+(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|[x] - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x(-1)}{x} = 1 = f'_-(0)$$

$$f'(0^-) - f'(0^+) = 1 - 0 = 1$$

مماس و قائم

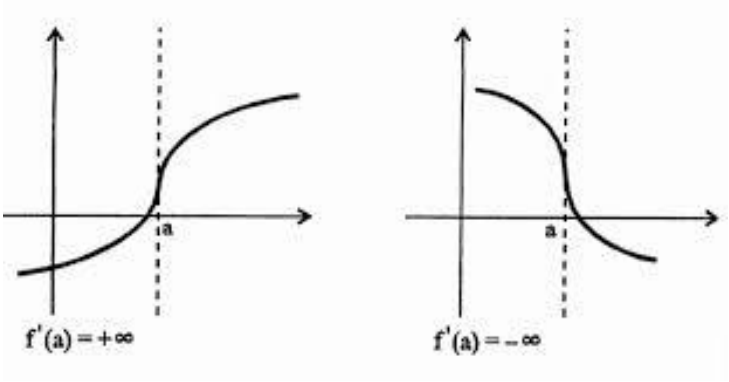
اگر تابع در $x = a$ مشتق پذیر باشد $f'(a)$ شیب خط مماس و $-\frac{1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است.



معادله خط مماس $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

معادله خط قائم $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

حالت خاص



اگر $f'(a)$ نامتناهی باشد خط مماس موازی محور عرضها و معادله آن $x=a$ است که به آن مماس قائم می‌گوئیم.

اگر مشتق راست و چپ وجود داشته باشد و باهم برابر نباشند یعنی تابع دارای نیم مماس راست و چپ است ولی در $x=a$ مماس وجود ندارد.

مثال: معادله خط مماس بر $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ در $x = 1$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\ \ (x-1)}$$

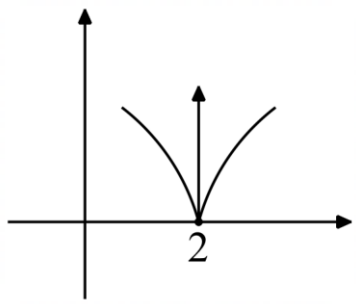
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد.

معادله مماس $\qquad A\Big|_0^1 \Rightarrow x = 1$

مثال: در نمودارهای زیر مشتق تابع را در نقطه مشخص شده تعیین کنید.

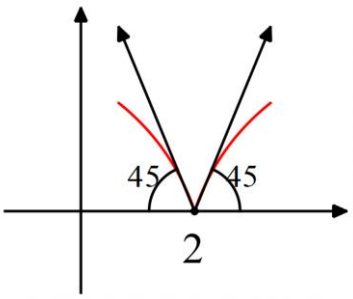
الف)



سمت راست تابع صعودی $f'(2^+) = +\infty$

سمت چپ نزولی $f'(2^-) = -\infty$

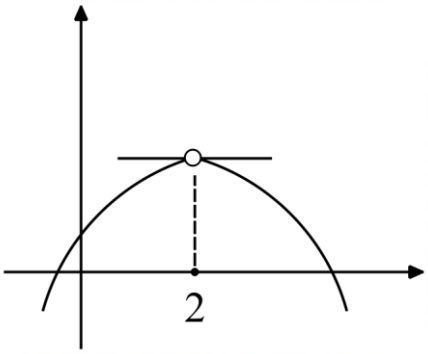
ب)



$f'(2^+) = m = tg45° = 1$

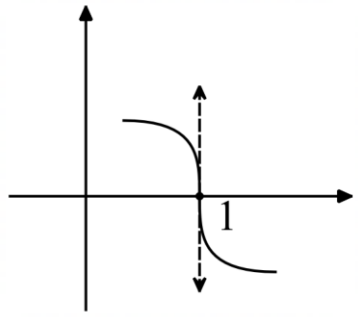
$f'(2^-) = m = tg145° = -1$

ج)



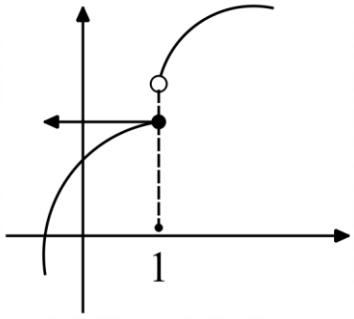
تابع در 2 تعریف نشده و مشتق پذیر نیست

د)



$f'(1^+) = f'(1^-) = -\infty$

هـ)



تابع در $x = 1$ پیوسته نیست و مشتق ندارد

$f'(1^-) = 0$ و $f'(1^+)$ وجود ندارد.

توضیح: خط‌های جهت‌دار شیب مماس را در آن نقطه مشخص می‌کند.

مثال: مشتق تابع زیر را به کمک تعریف به دست آورید و مشخص کنید تابع در آن نقطه مشتق پذیر است یا خیر

$$f(x)=\frac{[x]-x^2}{\sqrt{x^2+3[x]}} \qquad \text{در } x=1$$

$$f(1^+)=\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3}}=0 \qquad f(1)=\frac{1-1}{\sqrt{4}}=0$$

تابع پیوستگی راست دارد.

$$f(1^-)=\frac{-x^2}{\sqrt{x^2}}=-1$$

تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{[x]-x^2}{\sqrt{x^2+3x}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}=\frac{-2}{2}=-1$$

تابع فقط از راست مشتق پذیر است.